

Universitatea Tehnică a Moldovei

Angela Neaga

**Mecanică, fizică moleculară
și termodinamică**

Curs de prelegeri

**Chișinău
2006**

Universitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea Radioelectronică și Telecomunicații
Catedra Fizică

**Mecanică, fizică moleculară
și termodinamică**

Curs de prelegeri



**Chișinău
U.T.M.
2006**

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare este elaborată în conformitate cu programele analitice ale disciplinei Fizica la facultățile UTM și este adresată studenților din învățământul tehnic superior de la toate formele de instruire.

Lucrarea include două părți ale fizicii. Prima parte - bazele mecanicii clasice și ale teoriei relativității restrânse-este expusă în trei capitole: cinematica punctului material și a solidului rigid (I); dinamica clasică a sistemelor de puncte materiale (II), divizat în trei teme; bazele teoriei relativității restrânse (III). Partea a doua - bazele fizicii moleculare și ale termodinamicii este expusă în capitolul IV, divizat în două teme. Fiecare temă include: tratarea teoretică; aplicații și probleme rezolvate; întrebări de verificare. Paragrafele mari sunt structurate în subparagrafe, ceea ce, credem, va ușura selectarea și însușirea materialului, inclus în programa analitică a facultății.

În expunerea teoretică se insistă asupra esențialului, se urmărește scopul înțelegerii conceptelor și noțiunilor introduse, a legilor fizicii, cât și a stabilirii

domeniilor lor de valabilitate și aplicabilitate. Pentru înțelegerea materialului expus în lucrare este suficient ca cititorul să posede cunoștințe la fizică și matematică în limitele programei liceale pentru profilul real. Problemele rezolvate au fost selectate astfel încât: să completeze și să aprofundeze expunerea teoretică; să contribuie la o înțelegere mai detaliată a temei; să familiarizeze cititorul cu anumite tipuri de probleme fizice și cu aparatul matematic adecvat. Întrebările de verificare au rolul de a ajuta cititorul să-și testeze cunoștințele.

Sperăm că prezenta lucrare va constitui o completare utilă a publicațiilor existente.

I. Cinematica punctului material și a solidului rigid

§1. Elemente de algebră vectorială

În fizică se utilizează mărimi fizice scalare, caracterizate numai prin valori numerice și unități de măsură (energia, masa, distanța etc.) și mărimi fizice vectoriale sau vectori, caracterizate și prin direcție, sens și, eventual, punct de aplicație (forța, impulsul etc.).

1.1. Adunarea, scăderea și înmulțirea vectorilor

Pentru a aduna doi vectori \vec{A} și \vec{B} se deplasează unul din ei, fie \vec{B} , paralel cu el însuși astfel ca să ajungă cu originea în extremitatea lui \vec{A} (fig. 1.1) Vectorul trasat din originea lui \vec{A} până în extremitatea lui \vec{B} reprezintă vectorul sumă sau vectorul rezultat.

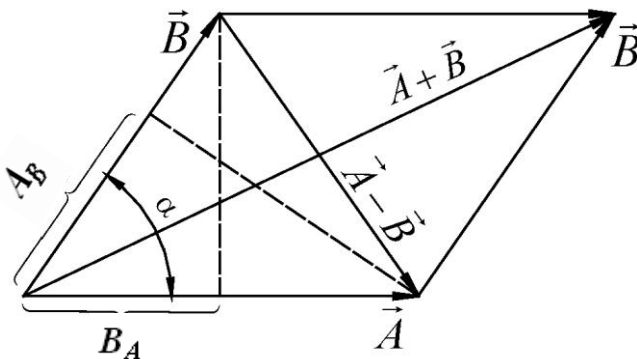


Fig.1.1

Diferența vectorilor \vec{A} și \vec{B} care au origine comună este vectorul cu originea în extremitatea vectorului \vec{B} (scăzător) și cu aceeași extremitate ca și vectorul \vec{A} (descăzut) (fig1.1). Este

simply de observat că $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = -(\vec{B} - \vec{A})$, adică vectorii $\vec{A} - \vec{B}$ și $\vec{B} - \vec{A}$ sunt opuși.

Prin înmulțirea unui vector \vec{A} cu un scalar α se obține un vector colinar cu \vec{A} , de modul αA , de același sens cu \vec{A} dacă $\alpha > 0$ și de sens opus dacă $\alpha < 0$. Doi vectori pot fi înmulțiți scalar sau vectorial. Produsul scalar al vectorilor \vec{A} și \vec{B} este o mărime scalară egală cu produsul dintre modulele celor doi vectori și cosinusul unghiului format de ei ($\angle \alpha$, fig.1.1)

$$\vec{A}\vec{B} = AB \cos \alpha. \quad (1.1)$$

Produsul scalar este comutativ și distributiv

$$(\vec{B} + \vec{C})\vec{A} = \vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C}. \quad (1.2)$$

Din (1.1) urmează:

$$\vec{A}\vec{A} = \vec{A}^2 = A^2. \quad (1.3)$$

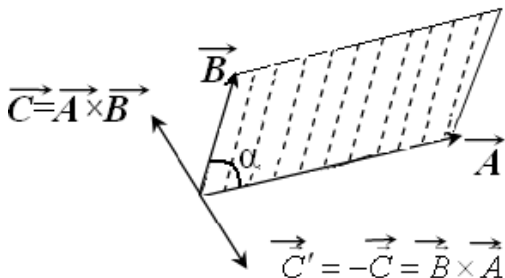


Fig.1.2

Utilizând proiecția unui vector pe direcția celuilalt (fig.1.1) se mai obțin două expresii pentru produsul scalar

$$\vec{A}\vec{B} = A_B B = A B_A. \quad (1.4)$$

Produsul vectorial al vectorilor \vec{A} și \vec{B} este vectorul \vec{C} cu modulul

$$C = A \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (1.5)$$

cu direcția perpendiculară pe planul format de vectorii \vec{A} și \vec{B} și cu sensul înaintării burghiului drept atunci când se rotește de la \vec{A} (primul vector) spre \vec{B} (al doilea vector) pe drumul cel mai scurt (fig.1.2). Vectorul $\vec{C}' = \vec{B} \times \vec{A}$ este opus vectorului \vec{C} , produsul vectorial nefiind comutativ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (1.6)$$

Produsul vectorial este distributiv:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \quad (1.7)$$

Din (1.5) urmează, $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, $a\vec{A} \times \vec{A} = 0$.

1.2. Vectori unitate (versori). Vector de poziție (rază vectoare)

Sistemul de coordonate utilizat în mecanică este cartezian, drept, cu sensurile axelor precizate prin vectorii unitate (versorii) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (fig 1.3) pentru care se respectă relațiile:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{i}| &= |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (1.8)$$

Într-un sistem de coordonate poziția punctului material (punctul M, fig.1.3) este univoc determinată de trei coordonate, anume x, y, z , sau de vectorul \vec{r} ce unește originea sistemului cu punctul material, numit vector de poziție sau rază vectoare,

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = r \frac{\vec{r}}{r} = r \vec{e}_r, \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}, \quad (1.9)$$

unde $x = r_x, y = r_y, z = r_z$ reprezintă proiecțiile vectorului \vec{r} pe axele de coordonate; \vec{e}_r este vector unitate pentru \vec{r} . Prin urmare:

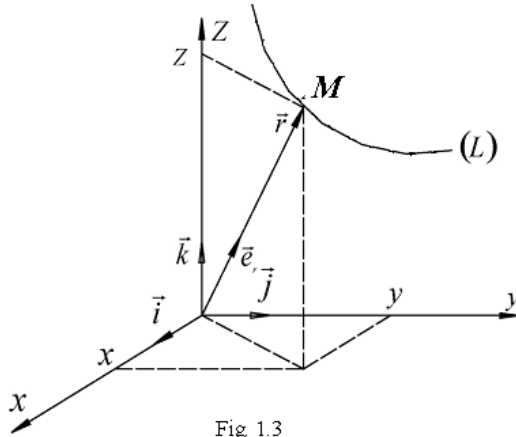


Fig 1.3

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \quad (1.9')$$

Evident, relații de tipul (1.9) se pot scrie pentru orice vector față de un sistem cartezian de coordonate.

Dacă pentru doi vectori arbitrari \vec{A} și \vec{B} care se înmulțesc scalar sau vectorial se scriu relații de tipul (1.9) și se utilizează proprietățile vectorilor unitate (1.8), rezultă următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x) . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Expresia (1.11) poate fi scrisă mai compact sub forma unui determinant:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} . \quad (1.11')$$

1.3. Derivata unui vector

Dacă vectorul \vec{A} variază în timp $\vec{A} = \vec{A}(t)$ atunci, în caz general, toate proiecțiile sale pe axele de coordonate de asemenea reprezintă funcții de timp:

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k} . \quad (1.12)$$

Viteza variației în timp a vectorului \vec{A} , adică derivata de ordinul întâi în raport cu timpul de la \vec{A} , se scrie:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} . \quad (1.13)$$

Pentru punctul material M , ce se deplasează pe o curbă arbitrară (L) (fig.1.3), variază în timp atât modulul vectorului de poziție $r = r(t)$ cât și direcția sa, caracterizată de vectorul unitate

$\vec{e}_r = \vec{e}_r(t)$, derivata căruia $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq 0$. Atunci

$$\vec{e}_r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\vec{e}_r]^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [e_r]^2 = 0, \quad (1.14)$$

deoarece $[e_r]^2 = 1$. Rezultatul obținut (1.14) poate fi generalizat: produsul scalar dintre oricare vector unitate și derivata acestuia în raport cu timpul este egal cu zero. Conform (1.1) vectorii respectivi sunt reciproc perpendiculari.

§2. Sisteme de referință. Modele mecanice

Orice corp se mișcă sau este în repaus față de altul, numit corp de referință. Prin urmare, starea corpului considerat se raportează la un *sistem de referință* (sau referențial) care reprezintă un ansamblu format din corpul de referință, sistem de coordonate legat rigid cu el și un dispozitiv de măsurare a timpului (ceasornic), imobil față de corpul de referință.

Condițiile concrete ale problemei care se rezolvă atunci când se analizează starea de mișcare sau de repaus a unui corp determină utilizarea pentru el a unui anumit *model mecanic*: punctul material, sistemul de puncte materiale, solidul rigid.

Un corp dimensiunile căruia pot fi neglijate în descrierea mișcării sale de translație, se numește *punct material*. Exemplu de punct material poate fi Pământul în mișcare în jurul Soarelui. Dar Pământul nu este punct material când se studiază rotația lui în jurul propriei axe.

Un ansamblu finit de puncte materiale care interacționează reciproc formează un *sistem de puncte materiale*. Sistemul este continuu dacă în orice punct geometric al spațiului ocupat de el se află câte un punct material. În caz contrar sistemul este discret.

Dacă distanța dintre oricare două puncte ale sistemului rămâne constantă în timp sistemul (continuu sau discret) se numește *solid rigid sau rigid*. Condiția impusă rigidului înseamnă că în timpul mișcării și interacțiunii cu alte corpuri rigidul nu se deformează, menținându-și dimensiunile și forma. Deși în natură nu există corpuri absolut nedeformabile modelul rigidului se utilizează atunci când deformațiile sunt neglijabile în condițiile concrete ale unei probleme.

§3. Mărimi cinematice fundamentale

3.1. Legile cinematice ale mișcării. Traietorie, deplasare

Considerăm un punct material în mișcare în raport cu un sistem de referință (fig1.4) (corpul de referință este în originea sistemului de coordonate cartezian, drept). Locul geometric al pozițiilor succesive ale punctului material în mișcare (curba L) reprezintă traiectoria punctului material. În orice moment de timp poziția punctului material este determinată prin vectorul de poziție $\vec{r}(t)$, sau prin coordonatele extremității lui $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Relația

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (3.1)$$

reprezintă *ecuația cinematică a punctului material în formă vectorială*, iar

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

reprezintă *ecuațiile cinematice ale punctului material în formă scalară*. În relațiile (3.1), (3.2) funcțiile de timp sunt considerate continue și de două ori derivabile în raport cu timpul t .

Mișcarea punctului material se caracterizează atât prin *distanța* (drumul) parcursă $\Delta s > 0$ cât și prin *vectorul deplasării* $\Delta \vec{r}$ (fig.1.4), unde $t = t_0 + \Delta t$.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \quad (3.3)$$

Menționăm că $\Delta r = \Delta s$ numai în cazul mișcării punctului material pe o traiectorie rectilinie în același sens, în rest $\Delta r < \Delta s$.

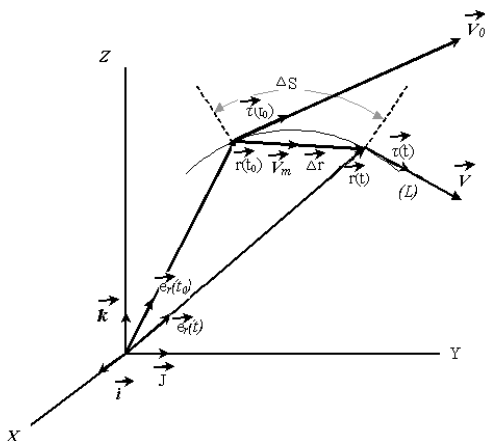


Fig.1.4

3.2. Viteza medie, viteza momentană

Raportul dintre vectorul deplasării și intervalul de timp corespunzător

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.4)$$

este un vector coliniar cu $\Delta \vec{r}$ și se numește *viteză medie* (fig.1.4).

Valoarea limită spre care tinde vectorul vitezei medii atunci când $\Delta t \rightarrow 0$ se numește *viteză instantanee* sau *momentană*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} . \quad (3.5)$$

Conform definițiilor (3.4), (3.5) viteza caracterizează rapiditatea mișcării în timp a punctului material; viteza momentană este egală cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul de la vectorul de poziție. Pentru $\Delta t \rightarrow 0$, $ds = |d\vec{r}|$ și vectorii $d\vec{r}$, \vec{v} au orientarea tangentei la traiectorie în punctul corespunzător poziției punctului material la momentul respectiv. Dacă se introduce un vector unitate $\vec{\tau}$ tangent la traiectorie în punctul corespunzător poziției punctului material și în sensul mișcării lui (fig.1.4).

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{v} , \quad (3.6)$$

atunci: $d\vec{r} = |d\vec{r}|\vec{\tau} = ds \vec{\tau}$. Viteza momentană devine

$$\vec{v} = \frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} \vec{\tau} = \frac{ds(t)}{dt} \vec{\tau} = v \vec{\tau} . \quad (3.7)$$

Atragem atenția, că în formulele de mai sus s-a folosit mărimea fizică $|d\vec{r}|$, care reprezintă modulul variației vectorului \vec{r} :

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} .$$

Această mărime fizică este diferită de $dr = d\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, care este variația modului vectorului \vec{r} . În mod similar sunt diferite următoarele mărimi fizice

$$|d\vec{v}| = \sqrt{(dv_x)^2 + (dv_y)^2 + (dv_z)^2} ,$$

$$dv = d\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} . \quad (3.8)$$

Aplicând definiția produsului scalar, obținem

$$\vec{r} d\vec{r} = r |d\vec{r}| \cos \alpha , \quad \vec{v} d\vec{v} = v |d\vec{v}| \cos \beta .$$

Reeșind din relațiile (1.13), (3.1) vectorul vitezei momentane se poate scrie prin proiecțiile sale pe axele de coordonate și vectorii unitate respectivi:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} . \quad (3.9)$$

Modulul vitezei momentane este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} . \quad (3.10)$$

Dacă în definiția (3.5) se introduce $\vec{r} = r\vec{e}_r$ avem:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}[r\vec{e}_r] = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} . \quad (3.11)$$

Conform (3.11) viteza momentană are o componentă determinată de variația în timp a modului vectorului de poziție și a doua--de variația în timp a direcției lui. Aceste componente sunt reciproc perpendiculare (a se vedea formula (1.14)).

3.3. Accelerația medie, accelerația momentană

Raportul dintre variația vectorului viteză $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ și intervalul de timp corespunzător $\Delta t = t - t_0$ este un vector coliniar cu $\Delta\vec{v}$, numit *accelerație medie* (fig.1.5):

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} . \quad (3.12)$$

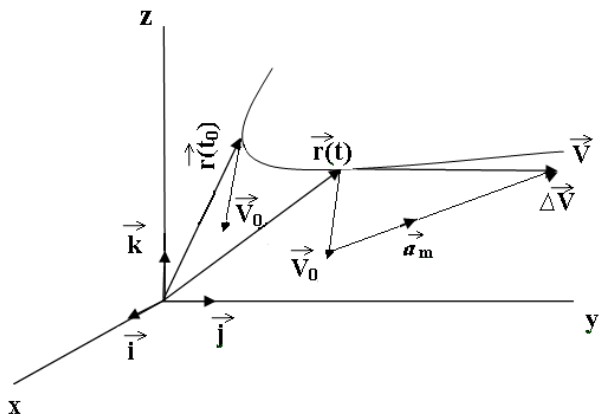


Fig. 1.5.

Accelerația momentană (instantanee) se definește ca limita accelerației medii când $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} . \quad (3.13)$$

Astfel, accelerația momentană este derivata de ordinul întâi a funcției $\vec{v} = \vec{v}(t)$, respectiv derivata de ordinul doi a funcției $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Din formulele (3.13) și (3.9) rezultă:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} , \quad (3.14)$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 , \quad (3.15)$$

unde

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} , \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} . \quad (3.16)$$

3.4. Accelerațiile tangențială și normală

În cazul general când $v = v(t)$ și $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ prin substituirea formulei (3.7) în definiția (3.13) se obține:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} . \quad (3.17)$$

Accelerația este determinată de variația în timp atât a modului vectorului vitezei cât și a direcției lui. Vectorii $\vec{\tau}$ și $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ sunt reciproc perpendiculari (a se vedea relația (1.14)), deci componentele accelerației din egalitatea (3.17) de asemenea sunt perpendiculare între ele. Componenta

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} , \quad (3.18)$$

numită *accelerație tangențială*, este orientată la fel ca și vectorul $\vec{\tau}$ dacă mișcarea punctului material este accelerată ($dv > 0$) și are sens contrar lui $\vec{\tau}$ dacă mișcarea punctului material este încetinită

($dv < 0$). Valoarea a_τ este determinată de rapiditatea variației în timp a modului vitezei. Componenta

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \quad (3.19)$$

numită *acclerație normală* sau *centripetă*, este determinată de modulul vitezei și de rapiditatea variației în timp a vectorului $\vec{\tau}$, adică a direcției vectorului vitezei și se poate scrie:

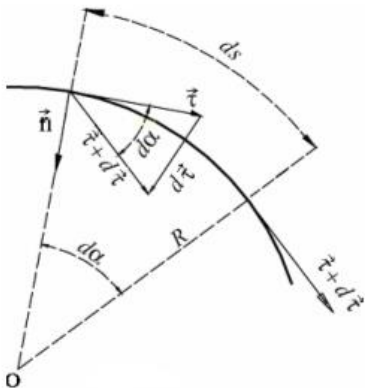


Fig 1.6

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (3.20)$$

Mărimea $\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$ se determină folosind fig.1.6, unde $\vec{\tau}, \vec{\tau} + d\vec{\tau}$ sunt vectori unitate ai vitezei punctului material în două poziții foarte apropiate, pentru care $|d\vec{\tau}| = ds$. Curba ds este un arc de cerc de rază R între aceste două poziții, având centrul în punctul O . Din fig.1.6 urmează: $ds = R \cdot d\alpha$, $|d\vec{\tau}| = \tau d\alpha$; $\tau = 1$. Atunci,

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{R}.$$

Deoarece $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$ și $d\vec{r}$ este orientat spre centrul 0, se introduce vectorul unitate \vec{n} orientat în lungul razei de curbură spre centru:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{|d\vec{r}|}{ds} \vec{n} = \frac{1}{R} \vec{n}; \quad |\vec{n}| = 1. \quad (3.21)$$

Expresia (3.21) este cunoscută ca formula întâi a lui Frenet, în care R reprezintă raza de curbură a traiectoriei din vecinătatea punctului cercetat. Luând în considerație relația (3.21), accelerația normală se scrie:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (3.22)$$

Substituind formulele (3.18) și (3.22) în relația (3.17) se obțin următoarele egalități, ilustrate pe figura 1.7

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (3.23)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (3.24)$$

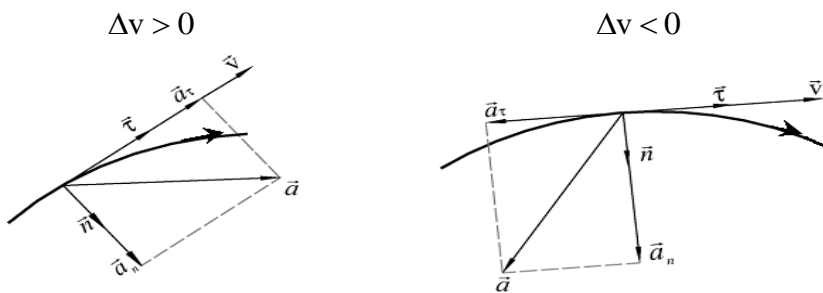


Fig. 1.7

§4. Cazuri particulare ale mișcării punctului material

4.1. Mișcarea rectilinie uniform variată

La deplasarea rectilinie a punctului material în lungul unei axe, de exemplu ox , se respectă condițiile:

$R = \infty$, $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$. Dacă mișcarea este și uniform

variata, adică $\vec{a} = \text{const}$ din definițiile (3.5) și (3.13) urmează:

$$dv = a dt, \quad \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt, \\ v = v_0 + at, \quad (4.1)$$

$$x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt, \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.2)$$

Formulele (4.1) și (4.2) s-au dedus în condițiile inițiale:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Din *ecuațiile vitezei* (4.1) și respectiv *a mișcării* (4.2) rezultă formulele deduse în cursul liceal:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v - v_0}{t}; \quad v_m = \frac{v + v_0}{2} \\ \Delta r &= v_m t; \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta r \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

Ultima relație poartă denumirea de *formula lui Galilei*.

În câmpul gravitațional uniform, adică la înălțime neglijabilă față de raza Pământului toate corpurile (în absența oricăror alte forțe, inclusiv de rezistență a aerului) se deplasează cu accelerația $\vec{g} = -g\vec{k}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, în raport cu sistemul de referință de pe fig. 1.4 sau 1.5. În condițiile indicate această accelerație o posedă și corpurile aruncate oblic, traiectoria cărora este parabolică. Această mișcare, studiată în cursul liceal, se compune dintr-o

mişcare uniformă pe orizontală și o mișcare uniform variată, conform egalităților (4.1)-(4.3), pe verticală.

4.2. Mișcarea circulară. Mărimi cinematice unghiulare

a) *Mărimi cinematice unghiulare. Relații între mărimile cinematice unghiulare și liniare.* La mișcarea punctului material pe un cerc sistemul de coordonate poate fi ales astfel încât acest cerc aparține planului xoy (fig 1.8) sau îi este paralel (fig1.9) și atunci modulul vectorului de poziție este constant, variindu-i numai direcția, adică $\vec{e}_r(t)$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(t) &= r\vec{e}_r(t) \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (4.4)$$

Utilizând relația dintre arcul ds descris de punctul material în timpul dt și unghiul $d\varphi$ cu care se rotește vectorul său de poziție în același timp, numit unghi de rotație, $ds = r d\varphi$, vectorul vitezei devine:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\tau} . \quad (4.5)$$

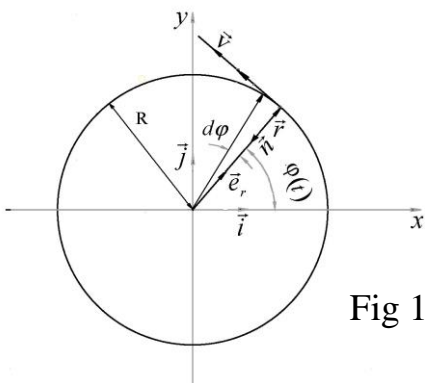


Fig 1.8

Se definește în formă scalară *viteza unghiulară momentană* a punctului material care caracterizează rapiditatea variației în timp a unghiului de rotație, și este egală cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul de la unghiul de rotație,

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} . \quad (4.6)$$

Substituind definiția (4.6) în formula (4.5) rezultă:

$$\vec{v} = r\omega \vec{\tau} , \quad (4.7)$$

$$v = r\omega . \quad (4.8)$$

Raza R a cercului ce aparține planului xOy este egală cu modulul vectorului de poziție $R = r$ (fig.1.8), deci

$$\vec{v} = R\omega \vec{\tau} , \quad (4.7')$$

$$v = R\omega . \quad (4.8')$$

În cazul mișcării circulare neuniforme se introduce mărimea fizică scalară ce caracterizează rapiditatea variației în timp a vitezei unghiulare, numită *acclerație unghiulară momentană*,

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} \quad (4.9)$$

egală cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul de la viteza unghiulară momentană sau derivata de ordinul doi de la unghiul de rotație. Substituind relațiile (4.8), (4.8') și (4.9) în formula (3.18) și (4.8), (4.8') în (3.22) rezultă următoarele expresii pentru accelerațiile tangențială și normală ale punctului material:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = \frac{d}{dt}[r\omega] \vec{\tau} = r\varepsilon \vec{\tau} = R\varepsilon \vec{\tau}, \quad (4.10)$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{n} = \frac{R^2\omega^2}{R} \vec{n} = R\omega^2 \vec{n} . \quad (4.11)$$

Atunci accelerația momentană a punctului material se scrie:

$$\vec{a} = R\omega^2 \vec{n} + R\varepsilon \vec{\tau} , \quad (4.12)$$

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} . \quad (4.13)$$

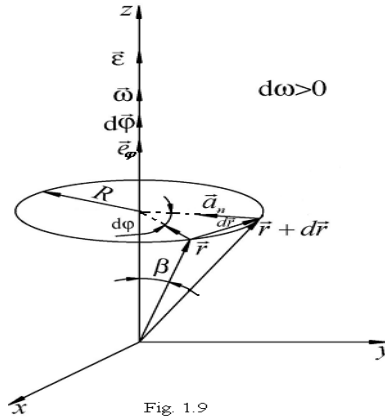


Fig. 1.9

Din cele expuse rezultă: mișcarea circulară a punctului material este caracterizată de mărimile $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau$ - numite în acest caz liniare - și de mărimile unghiulare $\varphi, \omega, \varepsilon$, legate de cele liniare prin relațiile (4.7), (4.8), (4.10)-(4.13).

Cercetând diferite mișcări ale punctului material și rigidului este comod și util să se introducă vectorii $\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$. Din fig.1.9, pe care este reprezentată mișcarea circulară accelerată a unui punct material în plan orizontal urmează:

$$dr = R d\varphi = r \sin \beta d\varphi \quad . \quad (4.14)$$

Vectorul unghi de rotație $d\vec{\varphi}$ (și vectorul unitate ce îi corespunde \vec{e}_φ) se introduce orientat perpendicular pe planul mișcării punctului material în sensul înaintării burghiului drept, rotit în sensul mișcării punctului material:

$$d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{e}_\varphi. \quad (4.15)$$

În baza acestei definiții și a comparării formulei (4.14) cu (1.5) se constată:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \quad . \quad (4.16)$$

Vectorii viteza unghiulară și accelerația unghiulară se definesc după cum urmează:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{\varphi} , \quad (4.17)$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_{\varphi} . \quad (4.18)$$

Dacă mișcarea circulară este accelerată ($\frac{d\omega}{dt} > 0$) $\vec{\varepsilon}$ are același sens cu $\vec{\varphi}, \vec{\omega}$ (fig.1.9), în caz contrar (când $\frac{d\omega}{dt} < 0$) - sens opus acestor vectori. Utilizând expresia (4.16) vom obține relații dintre mărimile liniare \vec{v} , \vec{a} și mărimile unghiulare $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \quad (4.19)$$

$$v = \omega r \sin \beta . \quad (4.20)$$

Din fig.1.9: $r \sin \beta = R$ (R - raza cercului), deci din egalitatea (4.20) rezultă (4.8'). Substituind relația (4.19) în definiția accelerației momentane liniare rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = , \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde $\vec{a}_{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

b. Mișcarea circulară uniformă. Pentru o astfel de mișcare a punctului material $\vec{\omega} = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $a_{\tau} = 0$, deci

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega R = \text{const} \\ \vec{v} &= R\omega \vec{e}(t) \end{aligned} \right\} . \quad (4.22)$$

În rezultatul integrării egalității (4.6) se obține *ecuația rotației uniforme*:

$$\begin{aligned} d\varphi(t) &= \omega dt, & \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi(t) &= \omega \int_0^t dt , \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega t . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Perioada $T = \frac{t}{N}$ și frecvența de rotație $\nu = \frac{N}{t}$ (N este numărul de rotații în timpul t) pot fi calculate din relațiile:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} . \quad (4.24)$$

c. *Mișcarea circulară uniform variată.* În cazul particular al rotației uniform variate a punctului material

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \overrightarrow{const} ,$$

de unde urmează:

$$d\omega(t) = \varepsilon dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega(t) = \varepsilon \int_0^t dt ,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t . \quad (4.25)$$

În baza formulei (4.6) și a ecuației vitezei unghiulare (4.25) se obține ecuația rotației uniform variate:

$$d\varphi(t) = \omega dt = (\omega_0 + \varepsilon t)dt, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt ,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} . \quad (4.26)$$

Din relațiile (4.25) și (4.26) rezultă viteza unghiulară medie

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \quad (4.27)$$

și relația

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\Delta\varphi = 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0) . \quad (4.28)$$

Este simplu de observat analogia între relațiile (4.1)-(4.3) pentru mișcarea rectilinie uniform variată și (4.25)-(4.28) pentru mișcarea de rotație (circulară) uniform variată a punctului material. Analogia se referă nu numai la aspectul relațiilor indicate, dar și la faptul că formulele (4.27) și (4.28) se deduc la fel ca și relațiile respective din (4.3).

§5. Mișcări ale solidului rigid

5.1. Mișcarea de translație

Cea mai simplă mișcare a rigidului este *mișcarea de translație* în care toate punctele materiale ale lui se deplasează cu aceeași viteză liniară, segmentul ce unește două puncte arbitrare ale rigidului rămânând invariabil și paralel cu el însuși (fig1.10).

Mișcarea de translație a rigidului este descrisă complet dacă se cunosc poziția inițială și dependența de timp a vectorului de poziție $\vec{r}_k(t)$ pentru oricare punct al corpului adică ecuația mișcării unui punct arbitrar. Altfel spus, descrierea mișcării de translație a corpului rigid se reduce la descrierea mișcării unui singur punct material, deci la cinematica punctului material.

5.2. Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe

Mișcarea corpului rigid în care toate punctele acestuia se deplasează pe cercuri cu centrele pe o dreaptă fixă, se numește *mișcare de rotație* în jurul acestei drepte, numită *axă de rotație* (fig.1.11). Vectorii de poziție pentru punctele materiale ce formează rigidul se rotesc în același interval de timp cu același unghi, numit *unghi de rotație al rigidului*. Toate punctele materiale se deplasează pe cercurile corespunzătoare de raze R_k cu aceleași viteză și accelerație unghiulară, numite *viteză și accelerație unghiulară de rotație a rigidului*. Vitezele și accelerațiile liniare \vec{v}_k respectiv \vec{a}_k , utilizate pentru punctele materiale ale rigidului depind de distanțele R_k de la punctele materiale la axa de rotație (egale cu razele cercurilor respective descrise de punctele materiale):

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k, \quad (5.1)$$

$$v_k = \omega r_k \sin \beta_k = \omega R_k, \quad (5.2)$$

$$\vec{a}_k = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k + \vec{\omega} \times \vec{v}_k = \vec{a}_{\tau k} + \vec{a}_{nk}, \quad (5.3)$$

$$a_{\tau k} = \varepsilon r_k \sin \beta_k = \varepsilon R_k, \quad (5.4)$$

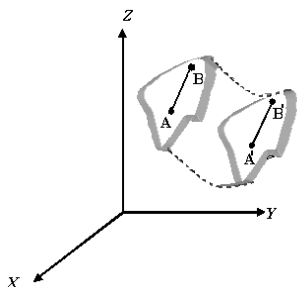


Fig 1.10

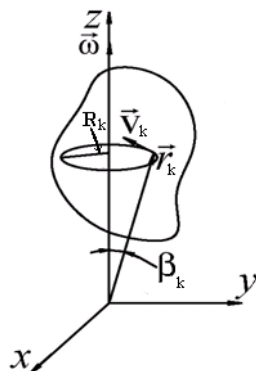


Fig 1.11

$$a_{nk} = \omega^2 r_k \sin \beta_k = \omega^2 R_k, \quad (5.5)$$

$$a_k = R_k \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.6)$$

Relațiile (5.1)-(5.6) au fost scrise în baza formulelor (4.19)-(4.21).

Mișcările de translație și rotație în jurul axei fixe reprezintă mișcări fundamentale ale corpului rigid deoarece celelalte tipuri de mișcări, anume mișcările plană, sferică (de rotație în jurul unui punct fix) și liberă (de rotație în jurul unei axe libere) se pot reduce la combinații ale lor.

Mișcarea corpului rigid pentru care toate punctele materiale ale lui se află, în orice moment, în plane paralele se numește mișcare plană. (fig.1.12).

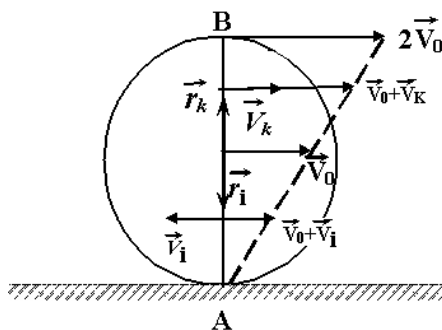


Fig.1.12

Astfel de mișcare efectuează un cilindru ce se rostogolește. În sistemul de referință cu originea în centrul O al cilindrului fiecare punct material are viteza $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$. În sistemul de referință legat cu suprafața orizontală în repaus toate punctele materiale ale rigidului iau parte concomitent la două mișcări: de translație a centrului de masă cu viteza \vec{v}_0 și de rotație cu viteza \vec{v}_k . Viteza rezultantă a unui punct arbitrar este

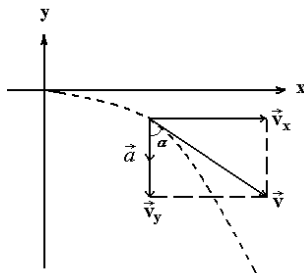
$$\vec{v}_0 + \vec{v}_k = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_k).$$

Viteza momentană a punctului de contact dintre disc și suprafață (punctul A, fig.1.12) este nulă. Dreapta care trece prin acest punct perpendicular pe planul cilindrului se numește *axă momentană de rotație*. Această axă se deplasează atât față de suprafața orizontală cât și pe suprafața laterală a cilindrului. În concluzie: mișcarea plană în raport cu suprafața fixă este compusă dintr-o mișcare de translație și o mișcare de rotație.

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1

Legea mișcării unui punct este $\vec{r} = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$ (b, c - constante pozitive cunoscute). Să se determine: **a)** dependența de timp a vectorilor $\vec{v}, \vec{v}_m, \vec{a}$, cât și a modulelor lor; **b)** dependența de timp a unghiului dintre \vec{a} și \vec{v} .



Rezolvare

a) Ecuația traiectoriei $y=y(x)$ se obține excluzând timpul t din legile mișcării punctului în lungul axelor x și y . Din legea mișcării urmează

$$\left. \begin{array}{l} x = bt \\ y = -ct^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{x}{b}, \\ y = -\frac{c}{b^2} x^2. \end{array}$$

b) Pentru determinarea $\vec{v}(t), \vec{v}_m(t), \vec{a}(t)$ se folosesc definițiile (3.4), (3.5), (3.13).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(bt\vec{i} - ct^2\vec{j}) = b\vec{i} - 2ct\vec{j},$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = b\vec{i} - ct\vec{j}, \quad (t_0 = 0; \quad r_0 = 0),$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(b\vec{i} - 2ct\vec{j}) = -2c\vec{j}.$$

În conformitate cu (3.10) și (3.14) determinăm dependențele de timp $v(t), v_m(t), a(t)$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2},$$

$$v_m = \sqrt{v_{xm}^2 + v_{ym}^2} = \sqrt{b^2 + c^2t^2},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2c.$$

c) Este evident din figură că unghiul dintre \vec{a} și \vec{v} este, totodată, și unghiul dintre \vec{v}_y și \vec{v} .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{b}{2ct}.$$

Problema 2

Un punct se mișcă pe cerc cu viteza $v = kt$, $k = 0,5 \text{ m/s}^2$. Să se determine accelerația punctului în momentul τ , calculat de la începutul mișcării, până în care punctul a parcurs $n = 0,1$ din lungimea cercului.

Rezolvare

Accelerația unui punct în mișcare circulară neuniformă este suma accelerațiilor tangențială și normală (a se vedea (3.23), (3.24)):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(kt) = k.$$

Pentru a determina a_n vom calcula în, prealabil, drumul parcurs până în momentul τ .

$$ds = vdt = ktdt, \\ S = \int_0^\tau ktdt = k \frac{\tau^2}{2}.$$

Conform condiției problemei $S = n \cdot 2\pi \cdot R$. Egalând cele două expresii pentru S determinăm consecutiv τ, v, a_n, a .

$$n \cdot 2\pi \cdot R = \frac{k\tau^2}{2}, \quad \tau = \sqrt{\frac{4n\pi \cdot R}{k}}, \\ v = kt = \sqrt{4nk\pi \cdot R}, \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4nk\pi \cdot R}{R} = 4nk\pi, \\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(4nk\pi)^2 + k^2} = \\ = k\sqrt{(4\pi n)^2 + 1} = 0,5\sqrt{(0,4\pi)^2 + 1} \left(\text{m/s}^2\right).$$

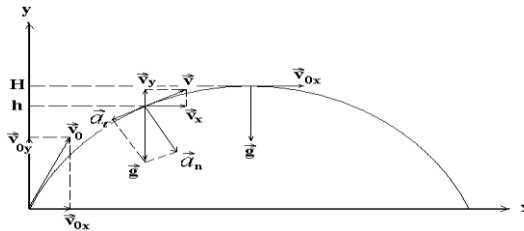
Problema 3

Un băiat aruncă o minge sub unghiul de 60° față de orizontală. Mingea intră printr-o fereastră deschisă aflată la 10m deasupra umărului băiatului, viteza în momentul respectiv fiind orizontală. Să se afle: **a)** viteza mingii în momentul aruncării; **b)** raza de curbură a traiectoriei descrise de minge în momentul în care aceasta intră pe fereastră și la un moment de timp t oarecare.

Rezolvare

a) Mingea intră prin fereastră având viteza orizontală, ceea ce înseamnă că ea se află în punctul de înălțime maximă $H=10m$. Legea mișcării și legea vitezei în lungul axei y sunt (4.2), (4.1), prin urmare

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_{0y} - gt.$$



Substituim $y=H$, $v_{Hy} = 0$. Obținem timpul de urcare t_H , v_{0y} , v_0 .

$$t_H = \frac{v_{0y}}{g}, \quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g} \Rightarrow v_{0y} = \sqrt{2gH},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin^2 \alpha}},$$

Pe întreaga traiectorie viteza orizontală $v_x = v_{0x}$, iar accelerația momentană a mingii este orientată vertical în jos și egală cu g . În punctul de înălțime maximă accelerația și viteza sunt

reciproc perpendiculare. Prin urmare $a_{nH} = g = \frac{v_{Hx}^2}{R_H} = \frac{v_{0x}^2}{R_H}$, de unde

$$R_H = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g},$$

Scriem legile vitezei pentru mișcarea uniformă în lungul axei x , uniform variată în lungul axei y și determinăm v într-un moment arbitrar t .

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2}$$

Din figură:

$$\frac{a_n}{g} = \frac{v_x}{v}, \quad a_n = \frac{g v_x}{v} = \frac{g v_{0x}}{v}.$$

Atunci:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{g v_{0x}} = \frac{(v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0 \cos \alpha}.$$

Acest rezultat se obține ușor și din legea conservării energiei mecanice.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + mgh \right) = 0, \quad v \frac{dv}{dt} = -g \frac{dh}{dt}, \quad \text{unde} \quad \frac{dv}{dt} = a_\tau,$$

$$\frac{dh}{dt} = v_y,$$

Atunci:

$$v a_\tau = -g v_y, \quad a_\tau = -g \frac{v_y}{v},$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \frac{v_y^2}{v^2}} = g \frac{v_x}{v} = g \frac{v_{0x}}{v_0}.$$

Substituind expresiile pentru v_{0x} și v , obținem R .

Problema 4

Rotorul unei mașini electrice are turația inițială $n_0=1500$ rot/min. După întreruperea curentului rotorul mai face $N_1=500$ rotații complete. Considerând mișcarea uniform încetinită se cere: **a)** timpul în care se oprește rotorul; **b)** accelerația unghiulară a rotorului; **c)** viteza unghiulară ω după ce rotorul a efectuat $N_2 = 100$ rotații complete.

Rezolvare

a), b) Timpul până la oprire și accelerația unghiulară rezultă din legea vitezei unghiulare (4.25) și relația (4.28)

$$\begin{cases} \omega_o = \varepsilon t \\ \omega_o^2 = 2\varepsilon\varphi \end{cases},$$

cu respectarea condițiilor $\varepsilon < 0$, $\omega = 0$, $\varphi_o = 0$, $\varphi = 2\pi N_1$,

$$\omega_o = \frac{2\pi n_0}{60} = \frac{\pi n_0}{30} \left(\frac{\text{rot}}{s} \right).$$

Rezolvând sistemul de ecuații, obținem

$$t = \frac{4\pi N_1}{\omega_o} = \frac{120 N_1}{n_0} = 40s,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_o^2}{4\pi N_1} = \frac{\pi n_0^2}{3600 N_1} = 3,92 \frac{\text{rot}}{s}.$$

c) Viteza unghiulară ω' se calculează din relația (4.28), substituind $\varphi' = 2\pi N_2$, expresiile pentru ε și ω_o

$$\begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\omega_o^2 - 2\varepsilon\varphi'} = \sqrt{\omega_o^2 - 4\pi N_2 \cdot \frac{\omega_o^2}{4\pi N_1}} = \omega_o \cdot \sqrt{1 - \frac{N_2}{N_1}} = \\ &= \frac{\pi n_0}{30} \sqrt{1 - \frac{N_2}{N_1}} = 140 \frac{\text{rot}}{s}. \end{aligned}$$

Problema 5

Un rigid începe a se roti în raport cu o axă fixă cu accelerația unghiulară $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \varphi$, unde ε_0 este o constantă pozitivă, iar φ este unghiul de rotație, determinat față de poziția inițială a rigidului. Care este dependența vitezei unghiulare a rigidului de unghiul de rotație $\omega = \omega(\varphi)$ -?

Rezolvare

Modificăm partea stângă a expresiei $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \varphi$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Obținem egalitatea

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \varepsilon_0 \cos \varphi,$$

în care separăm variabilele,

$$\omega d\omega = \varepsilon_0 \cos \varphi d\varphi.$$

Ultima egalitate se integrează respectând condiția problemei:

$$t_0=0; \quad \omega_0=0; \quad \varphi_0=0;$$

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{\varphi} \varepsilon_0 \cos \varphi d\varphi,$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \varepsilon_0 \sin \varphi, \quad \omega = \sqrt{2\varepsilon_0 \sin \varphi}.$$

Problema 6

O sferă de raza $R=10.0\text{cm}$ se rostogolește fără alunecare pe o suprafață orizontală, astfel că centrul său se deplasează cu accelerația constantă $a = 2,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. Poziția sferei peste $t=2\text{s}$ de la începutul mișcării este arătată pe figură. Să se afle în acest moment :

a) vitezele punctelor A,B,O; b) accelerația acestor puncte.

Rezolvare

a) în sistemul de coordonate de pe figură centrul de masă c al sferei se deplasează uniform accelerat cu viteza

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{a}_c t = \vec{a}_c t .$$

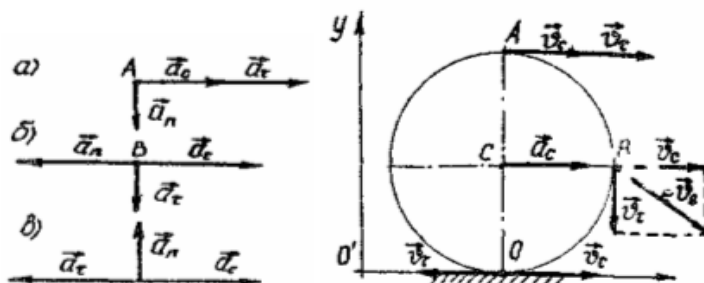
$$(t_0 = 0; v_0 = 0).$$

Toate celelalte puncte ale sferei efectuează concomitent două mișcări: de translație în lungul axei $o'x$ cu viteza \vec{v}_c și de rotație față de centrul c cu viteza \vec{v}_τ . Deoarece lipsește alunecarea, punctul o nu se deplasează față de axa indicată, prin urmare

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_c + \vec{v}_\tau = 0$$

$$\vec{v}_\tau = -\vec{v}_c = -\vec{a}_c t; \quad |\vec{v}_\tau| = |\vec{v}_c|.$$

Expresiile vitezelor punctelor A și B se obțin pe baza regulii compunerii vitezelor (a se vedea figura) și a rezultatelor de mai sus.



$$v_A = v_c + v_\tau = 2a_c t = 0,1 \frac{m}{s},$$

$$v_B = \sqrt{v_c^2 + v_\tau^2} = a_c t \sqrt{2} = 0,07 \frac{m}{s}.$$

b) Accelerația fiecărui punct al sferei, cu excepția centrului c , se compune din accelerația mișcării de translație, egală cu accelerația centrului \vec{a}_c , și accelerația mișcării de rotație $\vec{a}_{rot} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Astfel, $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Trasând pe figură vectorii componenți ai accelerației pentru punctele A, B și O, obținem următoarele relații pentru accelerațiile rezultante ale punctelor respective

$$a_A = \sqrt{(a_c + a_\tau)^2 + a_n^2}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{R} = \frac{a_c^2 t^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = a_c.$$

Atunci

$$a_A = 2a_c \sqrt{1 + \left(\frac{a_c^2 t^2}{2R} \right)^2} = 5,59 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_c - a_n)^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(a_c - \frac{a_c^2 t^2}{R} \right)^2 + a_c^2} =$$

$$, \quad = a_c \sqrt{\left(1 - \frac{a_c t^2}{R} \right)^2 + 1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2,$$

$$a_O = \sqrt{(a_c - a_\tau)^2 + a_n^2} = a_n = \frac{a_c^2 t^2}{R} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

Întrebări de verificare

1. Care din formulele $v = \frac{dr}{dt}$, $v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, $a = \frac{|d\vec{v}|}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ definește modulul:
a) vitezei momentane; b) accelerației momentane?. Să se argumenteze răspunsul.
2. Să se definească vectorii accelerație tangențială \vec{a}_τ și accelerație normală \vec{a}_n , să se explice formulele de calcul ale modulelor acestor vectori. Să se traseze vectorii \vec{v} , \vec{a} , \vec{a}_n , \vec{a}_τ pentru mișcarea încetinită a punctului material pe o curbă.
3. Pentru un punct material în mișcare circulară uniform accelerată se cunosc, la momentul de timp t , valorile vitezei, accelerației normale, accelerației tangențiale. Să se determine, pentru același moment de timp, unghiul de rotație φ , viteza unghiulară ω , accelerația unghiulară ε .
4. Să se definească vectorii $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ și să se prezinte ilustrarea lor grafică pentru mișcarea circulară încetinită a unui punct material.
5. Cum se definește mișcarea rigidului, numită: a) de translație; b) de rotație în jurul axei fixe?

II. Dinamica clasică a sistemelor de puncte materiale

În cadrul dinamicii—compartimentul fundamental al mecanicii—se studiază cauzele care determină și cele care modifică starea de repaus sau de mișcare a corpurilor.

Date experimentale conduc la următoarele concluzii:

- 1) În anumite condiții, un corp aflat sub acțiunea altor corpuri își modifică viteza, adică îi este imprimată accelerație.
- 2) În anumite condiții, un corp aflat sub acțiunea altor corpuri se deformează, modificându-și forma și dimensiunile.

Descrierea cantitativă a acestor procese se efectuează prin introducerea noțiunii de forță: orice acțiune asupra unui corp, care-i imprimă acestuia accelerație sau îl deformează reprezintă o *forță – mărime fizică vectorială* – măsură a acțiunii.

Dinamica clasică se bazează pe câteva principii cu un caracter general, aplicabile tuturor sistemelor care satisfac ipotezele mecanicii clasice: principiul inerției, principiul fundamental al dinamicii, principiul acțiunii și reacțiunii, principiul independenței acțiunii forțelor, formulate de către Newton, cât și principiul relativității, formulat de către Galilei. Numeroase experimente fizice și observații le confirmă justetea indiferent de natura forțelor de interacțiune dintre corpuri.

Apariția în secolul XX a mecanicii relativiste și mecanicii cuantice a evidențiat limitele valabilității mecanice clasice numai pentru macrocorpuri în mișcare cu viteze mici în comparație cu viteza luminii în vid.

§ 6. Principiile mecanicii clasice (recapitulare)

În acest paragraf vor fi expuse succint principiile mecanicii clasice, cu excepția principiului relativității, inclus în capitolul trei.

6.1. Principiul inerției

Principiul inerției, determinat experimental de către Galilei și formulat ca *prima lege a mecanicii* de către Newton, se enunță astfel: un corp material își păstrează starea de repaus ori de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât asupra lui nu se exercită acțiuni exterioare. Proprietatea corpului de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă se numește *inerție*.

O problemă esențială, legată de principiul întâi, este cea a sistemului de referință față de care se determină repausul sau mișcarea corpului. Pornind de la concepția despre spațiu absolut, Newton a admis existența unui sistem de referință imobil, absolut. Un astfel de sistem de referință nu există în natură, însă există sisteme de referință în raport cu care principiul inerției se îndeplinește, numite *sisteme de referință inerțiale*. Este simplu de ajuns la concluzia că toate sistemele de referință inerțiale se mișcă unele față de altele rectiliniu și uniform.

Experimental s-a demonstrat că sistemul de referință legat de Pământ nu este riguros inerțial (deși, cu aproximație, este frecvent utilizat ca inerțial). Cauza constă în apariția unor accelerații mici ale corpurilor care nu sunt rezultatul acțiunii altor corpuri, dar o urmare a proprietăților sistemului de referință, anume a accelerației Pământului. Din cauza rotației diurne fiecare punct de pe suprafața acestuia are o accelerație de aproximativ $0,03 \text{ m/s}^2$, iar datorită rotației în jurul Soarelui – o accelerație de ordinul $0,06 \text{ m/s}^2$. Riguros inerțial este sistemul de referință ce nu posedă accelerație, față de care accelerația unui corp este condiționată exclusiv de interacțiunile dintre corpul respectiv și alte corpuri. Se consideră riguros inerțial sistemul de referință cu originea în Soare și cu axele de coordonate orientate spre trei anumite stele fixe.

6.2. Principiul fundamental al dinamicii. Principiul independenței acțiunii forțelor

Principiul fundamental al dinamicii (cunoscut și sub denumirea de *legea a doua a lui Newton*, *principiul acțiunii forței*)

a fost enunțat de către Newton astfel: „Variația mișcării este proporțională cu forța aplicată și dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța”. „Variația mișcării” este numită în prezent variația impulsului în unitatea de timp. În actuala terminologie fizică principiul respectiv, generalizat pentru un punct material supus acțiunii mai multor forțe, se enunță: derivata impulsului $\vec{P} = m\vec{v}$ unui punct material în raport cu timpul reprezintă rezultanta \vec{F} a forțelor care acționează asupra punctului material din partea altor corpuri,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} . \quad (6.1)$$

Generalizarea menționată se bazează pe principiul independenței acțiunii forțelor: dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe, atunci fiecare dintre ele produce un efect care este independent de acțiunea celorlalte forțe

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} .$$

Masa m a punctului material este o constantă în mecanica clasică, deci legea (6.1) se poate scrie:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} , \quad (6.2)$$

$$m\vec{a} = \vec{F} , \quad (6.2')$$

sau

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= m \frac{dv_x}{dt} = F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= m \frac{dv_y}{dt} = F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv_z}{dt} = F_z \end{aligned} \right\} . \quad (6.3)$$

Masa punctului material din ecuațiile (6.2) și (6.3) este o măsură a inerției lui $\left(a \sim \frac{1}{m}\right)$ și se numește *masă inertă*. Masa unui punct material sau, în general, a corpului mai are o funcție esențială: de a caracteriza proprietățile corpului în interacțiunile gravitaționale. Determinările experimentale conduc la concluzia că până la o eroare relativă de ordinul 10^{-12} masa inertă și cea gravitațională sunt egale.

Conform principiului fundamental, numai interacțiunile cu alte corpuri determină accelerația punctului material sau a corpului considerat. Prin urmare principiile 1 și 2 se realizează numai în sisteme de referință inerțiale.

Dacă se cunosc condițiile ce determină starea inițială a punctului material și proiecțiile forțelor pe axele de coordonate în funcție de timp, prin integrarea ecuațiilor (6.3) se determină proiecțiile vitezei și coordonatele punctului material în orice moment de timp.

Se mai poate scrie:

$$d\vec{P} = \vec{F} dt \quad , \quad \left. \begin{array}{l} dP_x = F_x dt \\ dP_y = F_y dt \\ dP_z = F_z dt \end{array} \right\} , \quad (6.4)$$

adică variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței rezultante ce acționează asupra lui. Menționăm că expresia (6.1) reprezintă și teorema variației impulsului punctului material. Dacă $\vec{F} = 0$ atunci din ecuația (6.1) urmează

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t_0) = c\vec{onst} \quad , \quad (6.5)$$

ceea ce constituie legea de conservare a impulsului punctului material: dacă forța rezultantă ce acționează asupra punctului material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant în modul, direcție și sens.

6.3 Principiul acțiunii și reacțiunii

Principiul acțiunii și reacțiunii, cunoscut și sub denumirea de *legea a treia a lui Newton*, afirmă: dacă corpul unu acționează asupra corpului doi cu forța \vec{F}_{12} atunci corpul doi acționează asupra primului cu forța \vec{F}_{21} , egală în modul și cu sens contrar.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} . \quad (6.5)$$

Evident, ambele forțe sunt situate pe aceeași dreaptă suport. În formularea lui Newton una din forțele (indiferent care) este numită *acțiune*, cealaltă – *reacțiune* și se postulează că acțiunile dintre corpuri sunt reciproce, concomitente, egale în modul și cu sens contrar, au aceeași natură și puncte de aplicație diferite. Rezultanta forțelor \vec{F}_{12} și \vec{F}_{21} este egală cu zero numai în cazurile când corpurile considerate fac parte dintr-un sistem, acțiunea și reacțiunea fiind forțe interne.

Sintetizând toate cele enunțate și expuse în acest paragraf se ajunge la concluzia că starea inițială a punctului material și principiile puse la baza dinamicii asigură determinarea strictă, univocă a mișcării lui. Această concluzie constituie esența determinismului mecanicii clasice.

*Lucrul și energia mecanică

§ 7. Lucrul mecanic. Puterea. Forțe conservative și neconservative

7.1. Lucrul mecanic. Puterea

Dacă rezultatul acțiunii forței asupra unui corp este deplasarea lui, atunci această acțiune se caracterizează prin mărimea fizică, numită *lucru mecanic al forței*. Mărimea fizică egală cu produsul scalar

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F |d\vec{r}| \cos \alpha = F_s ds; \angle \alpha = \angle (\vec{F}, d\vec{r}) , \quad (7.1)$$

reprezintă *lucrul mecanic elementar*, efectuat de forța \vec{F} la deplasarea $d\vec{r}$ a punctului său de aplicație pe o traiectorie arbitrară (fig.2.1). În baza egalității (1.10) lucrul elementar se mai poate scrie

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz . \quad (7.2)$$

În general, forța \vec{F} și proiecțiile ei pe axele de coordonate depind atât de coordonatele x, y, z adică de vectorul de poziție \vec{r} al punctului său de aplicație, cât și de viteza lui, de timp, adică sunt funcții de mai multe variabile. Aceasta înseamnă că lucrul elementar definit de expresiile (7.1) nu este o diferențială totală a unei funcții f de coordonatele x, y, z ale punctului de aplicație a forței, care s-ar nota $df(x, y, z)$. Anume din aceste considerente lucrul elementar a fost notat δA , ceea ce înseamnă că $F|d\vec{r}|\cos\alpha = F_s ds$ este doar o expresie diferențială, valoarea căreia depinde de traiectoria pe care se deplasează punctul de aplicație a forței.

Din expresia (7.1) rezultă: $\delta A > 0$ deci forța efectuează lucru motor dacă $0 \leq \alpha < \pi/2$; $\delta A < 0$, adică forța efectuează lucru rezistent dacă $\pi/2 < \alpha \leq \pi$; forța perpendiculară pe deplasare nu efectuează lucru mecanic, $\delta A = 0$, dacă $\alpha = \pi/2$.

Dacă corpul este deplasat din poziția 1 în poziția 2 (fig 2.1) atunci lucrul mecanic efectuat se calculează $A_{12} = \sum_1^n \delta A_i$, sau prin integrala curbilinie

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds . \quad (7.3)$$

Pentru calcularea acestei integrale definite este necesar să cunoaștem dependența F_s de coordonata curbilinie s . Fie graficul

acestei dependențe reprezentat pe figura (2.2). Lucrul elementar δA se măsoară cu aria dreptunghiului de lățime ds și înălțime F_s . Lucrul A_{12} , efectuat pe întreaga porțiune de traiectorie 1-2 se măsoară cu aria suprafeței hașurate.

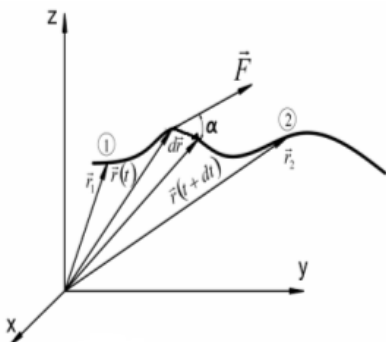


Fig. 2.1

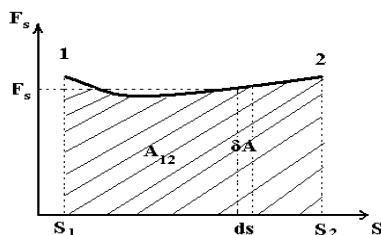


Fig. 2.2

Formula (7.3) reprezintă expresia cea mai generală a lucrului mecanic, valoarea căruia depinde, în general, de traiectoria punctului material.

Puterea medie reprezintă lucrul mecanic efectuat într-o unitate de timp

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} . \quad (7.4)$$

Puterea momentană

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A(t)}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F|d\vec{r}|\cos\alpha}{dt} = \frac{F_s ds}{dt} = F_s v = \vec{F} \vec{v}, \quad (7.5)$$

este egală cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul de la lucrul mecanic, sau cu produsul scalar dintre vectorul forță și viteza punctului ei de aplicație la momentul respectiv de timp. Din relațiile ce definesc lucrul mecanic și puterea se vede clar dependența lor de sistemul de referință ales.

7.2. Forțe conservative și neconservative

Să calculăm lucrul mecanic efectuat de câteva tipuri de forțe. Din raționamente ulterioare vom nota prin dA lucrul elementar al forțelor elastică, centrală și gravitațională omogenă.

Exemplul I. Lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$ (k – constanta elastică a corpului deformat, x – deformarea absolută, considerată pozitivă) efectuat la deformarea corpului în limitele de la x_1 la x_2

$$A_{12} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} < 0, \quad (7.6)$$

este negativ, forța elastică fiind orientată opus deformației. La dispariția forței deformatoare forța elastică efectuează un lucru pozitiv de micșorare a deformației:

$$A_{21} = -k \int_{x_2}^{x_1} x dx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} > 0.$$

Evident, $A_{12} = -A_{21}$.

Exemplul II. Lucrul mecanic al forțelor centrale.

Forțele care acționează asupra punctului material se numesc *forțe centrale* dacă: depind numai de distanța dintre punctul material considerat și un punct fix, numit *centrul câmpului de forțe*; în orice punct din spațiu sunt orientate spre (sau de la) centru. În centru, de regulă, se plasează originea sistemului de coordonate (astfel se va proceda și în prezenta lucrare). Forța centrală se scrie:

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (7.7)$$

unde \vec{r} este vector de poziție al punctului material, trasat din centrul câmpului de forțe; $F_r(r)$ este proiecția forței \vec{F} pe \vec{r} . Dacă $F_r(r) > 0$ atunci forța este de respingere, dacă $F_r(r) < 0$ atunci forța este de atracție.

Forțele gravitaționale și coulombiană sunt centrale și depind de \vec{r} conform relației:

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} , \quad (7.8)$$

unde

$$\alpha = -\lambda m_1 m_2 , \quad \alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \quad (7.9)$$

pentru forța gravitațională respectiv pentru forța coulombială. Lucrul elementar al forțelor centrale coulombiene sau gravitaționale (7.8) este:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} d\vec{r} = \frac{\alpha}{r^2} dr , \quad (7.10)$$

$$\left(\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r}^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr \right) ,$$

iar lucrul mecanic integral se calculează din relația:

$$A_{12} = \alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} . \quad (7.11)$$

Exemplu III. Lucrul mecanic al forței gravitaționale omogene.

Forța de greutate omogenă $\vec{G} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ efectuează lucrul elementar:

$$dA = \vec{G} d\vec{r} = -mg dz . \quad (7.12)$$

La deplasarea punctului material în lungul axei Oz între pozițiile z_1 și z_2 lucrul forței \vec{G} se calculează astfel:

$$A_{12} = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2) . \quad (7.13)$$

Analizând rezultatele (7.6), (7.11), (7.13), obținute în aceste trei exemple, se constată că în natură există forțe pentru care: 1)

lucrul mecanic nu depinde de forma traiectoriei punctului material între pozițiile arbitrare 1 și 2, dar numai de aceste poziții (fig 2.3):

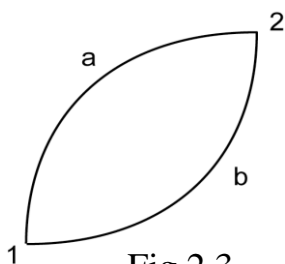


Fig 2.3

$$A_{1b2} = A_{1a2} . \quad (7.14)$$

2) la schimbarea sensului mișcării punctului material se schimbă semnul lucrului forței:

$$-A_{1b2} = A_{2b1} . \quad \text{Atunci pe}$$

traiectoria închisă arbitrară $1a2b1$ a punctului de aplicare a forței lucrul acestei forțe este egal cu zero:

$$A_{1a2b1} = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0 . \quad (7.15)$$

Relațiile (7.14), (7.15) se realizează pentru forțele care depind numai de poziția reciprocă a corpurilor (părților unui corp), adică $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$; Lucrul mecanic elementar al acestor forțe (7.10), (7.12) reprezintă o diferențială totală a unei funcții $f(\vec{r})$. Astfel de forțe sunt numite *conservative*, iar câmpul lor se numește *câmp potențial*.

În analiza vectorială se introduce noțiunea de circulație C a unui vector \vec{a} pe un contur închis (L) definită astfel:

$$C = \oint_L \vec{a} d\vec{l} = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz) . \quad (7.16)$$

Semnificația fizică a circulației este ușor de recunoscut. Dacă vectorul \vec{a} este o forță \vec{F} , atunci circulația C este lucrul mecanic al ei pe un contur închis L .

În baza egalității (7.15) circulația unei forțe conservative pe un contur arbitrar închis este egală cu zero:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0 . \quad (7.17)$$

Exemplul IV. Lucrul mecanic al forței de frecare.

Forța de frecare de alunecare este $F_f = \mu F_n$, unde μ este coeficientul de frecare, iar F_n este rezultanta forțelor de apăsare pe direcția perpendiculară la suprafața de contact între corpuri. La deplasarea punctului material de masă m din poziția 1 în poziția 2 pe un cerc de rază r (fig 2.4) lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$A_{12} = \int_0^{\frac{\pi r}{2}} F_f ds \cos \pi = -F_f \int_0^{\frac{\pi r}{2}} ds = -\mu mgr \frac{\pi}{2},$$

deoarece $F_f = \mu mg = \text{const.}$

Pe drumul 2-0-1 forța de frecare efectuează lucrul:

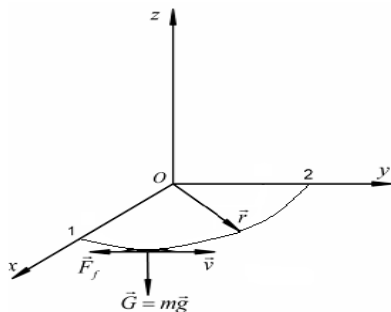


Fig. 2.4

$$A_{201} = A_{20} + A_{01} = -\mu mgr - \mu mgr = -2\mu mgr, \quad A_{201} \neq A_{12};$$

Lucrul forței de frecare este negativ în lungul oricărei traiectorii și pe orice traiectorie închisă este diferit de zero:

$$A_{12} + A_{201} \neq 0.$$

În concluzie: în natură există forțe, lucrul cărora depinde de forma traiectoriei punctului său de aplicație. Astfel de forțe sunt numite *neconservative*. Din categoria forțelor neconservative fac parte toate forțele care nu respectă condiția (7.17), lucrul mecanic al

căroră depinde de traiectoria punctului material asupra căruia acționează. Un exemplu de forțe neconservative reprezintă forțele care depind de vitezele punctelor materiale asupra căroră acționează și efectuează un lucru sumăr negativ la orice deplasare a lor. Astfel de *forțe* se numesc *disipative* (forța de frecare la alunecare, forțele de rezistență la mișcarea corpurilor în medii gazoase și lichide). Există forțe care depind de vitezele punctelor materiale asupra căroră acționează, dar fiind orientate perpendicular pe aceste viteze lucrul lor este egal cu zero. Astfel de forțe, considerate neconservative, se numesc *forțe giroscopice* (forța Lorentz cu care câmpul magnetic acționează asupra sarcinii electrice în mișcare în acest câmp).

§ 8. Energia mecanică

Energia mecanică a unui punct material este egală cu suma energiilor sale cinetică și potențială.

8.1. Energia cinetică a punctului material

Se consideră deplasarea $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (\vec{v} – viteza punctului material în intervalul de timp $(t, t + dt)$), a unui punct material de masă m , asupra căruia acționează forța rezultantă \vec{F} ce efectuează lucrul elementar

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} \quad . \quad (8.1)$$

Substituind expresia (6.1) în (8.1) obținem:

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{d}{dt}(m\vec{v})\vec{v}dt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \\ \left(\vec{v}d\vec{v} &= \frac{1}{2}d(\vec{v}\vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2)\right). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Mărimea scalară

$$W_c = \frac{mv^2}{2}, \quad (8.3)$$

se numește *energie cinetică* a punctului material. Egalitatea (8.2) devine:

$$\delta A = dW_c. \quad (8.4)$$

Egalitatea (8.4) reprezintă *forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice*, formulată astfel: lucrul mecanic elementar al forței rezultante care acționează asupra punctului material este egal cu variația energiei cinetice a acestui punct. Prin integrarea egalității (8.4), considerându-se două poziții arbitrare ale punctului material în momentele t_1 și t_2 cu vitezele respective v_1 și v_2 , se ajunge la forma integrală a teoremei susnumite:

$$A_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \Delta W_c. \quad (8.5)$$

Conform egalității (8.5) energia cinetică reprezintă o *funcție de stare*, variația ΔW_c a căreia depinde numai de stările inițială și finală, exprimate prin vitezele v_1 respectiv v_2 .

8.2. Energia potențială a punctului material

Conform relațiilor (7.14) – (7.17) lucrul mecanic al forței conservative $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ este independent de forma traiectoriei punctului său de aplicație. Prin urmare, lucrul $\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ reprezintă o diferențială totală dA a unei funcții scalare de stare $W_p = W_p(x, y, z)$, în sensul că lucrul mecanic elementar este egal cu diferența dintre valorile acestei funcții în starea inițială (\vec{r}) și cea finală $\vec{r} + d\vec{r}$ a punctului material. Această funcție de stare este numită *energie potențială*.

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dW_p(x, y, z). \quad (8.6)$$

Egalitatea (8.6) și formularea de mai sus reprezintă *teorema variației energiei potențiale în formă diferențială*. Integrând egalitatea (8.6) în limitele arbitrare r_1, r_2 se obține:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} dW_p, \quad A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \quad (8.7)$$

Relația (8.7) este forma integrală a teoremei susnumite. Utilizând formula (7.17), rezultă

$$\oint_L dW_p = 0, \quad (8.8)$$

Menționăm că egalitățile (8.6), (8.7) sunt juste cu condiția că forța conservativă F este staționară (invariabilă în timp). Din aceste formule este evident că, măsurând lucrul forței potențiale aplicate punctului material, se poate determina doar diferența valorilor energiei potențiale a sistemului, format din punctul material considerat și corpul care exercită forța conservativă. Deci această energie este determinată numai până la o constantă aditivă arbitrară. Pentru a obține o dependență univocă a energiei potențiale a sistemului de starea lui este necesar să se aleagă în fiecare problemă concretă starea inițială în care energia potențială este considerată nulă. Se fixează valoarea nulă a funcției W_p într-o anumită poziție a punctului de aplicare a forței conservative, de exemplu în poziția 1, căreia îi corespunde vectorul de poziție $r_1 = \infty$, adică $W_p(\infty) = 0$. Atunci se poate defini energia potențială a sistemului ajuns într-o poziție (sau configurație) 2, cu vectorul de poziție r , prin expresia:

$$W_{p2}(\vec{r}) = W_{p1} - A_{12} = -A_{12}, \quad (8.9)$$

sau

$$W_p(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} d\vec{r}. \quad (8.10)$$

În aceste condiții concrete ale stării inițiale energia potențială a sistemului în starea determinată de vectorul de poziție \vec{r} este egală cu lucrul mecanic al forței conservative

1) luat cu semnul opus, pentru deplasarea punctului de aplicație a forței de la infinit până în punctul considerat (egalitatea întâi din formula (8.10)).

2) pentru deplasarea punctului de aplicație a forței din starea considerată până la infinit (egalitatea a doua din (8.10)).

Deoarece $dW_p(x, y, z)$ este o diferențială totală urmează:

$$dW_p(x, y, z) = \frac{\partial W_p}{\partial x} dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} dz.$$

Substituind această egalitate și (7.2) în relația (8.6) rezultă

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial W_p}{\partial x} dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} dz \right), \quad (8.11)$$

sau:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}. \quad (8.12)$$

În rezultat, pentru forța conservativă se poate scrie:

$$\vec{F}(x, y, z) = - \left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (8.13)$$

Din analiza vectorială se cunoaște că prin aplicarea vectorului ∇ , numit operatorul nabra,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

asupra unei funcții scalare $f(x, y, z)$ se obține un vector, denumit gradientul (grad) funcției scalare f

$$\text{grad } f = \nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Proiecțiile vectorului $\text{grad } f$ pe axele sistemului cartezian de coordonate sunt

$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \nabla_y f = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \nabla_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se mai deduce că vectorul ∇f este perpendicular pe suprafața $f(x, y, z) = \text{const.}$ Comparând aceste relații cu (8.13) se obține:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\text{grad}W_p, \quad \vec{F}(x, y, z) = -\nabla W_p. \quad (8.14)$$

Astfel, forța conservativă care acționează asupra punctului material, aflat într-un câmp de forțe, este egală cu gradientul, luat cu semnul opus, al energiei potențiale a acestui punct material în câmpul potențial considerat. În baza relațiilor (8.11)-(8.14) se afirmă că forța conservativă derivă dintr-o energie potențială. Relațiile (8.11)-(8.14) permit calculul; forței conservative \vec{F} dacă se cunoaște funcția $W_p(x, y, z)$; energiei potențiale W_p dacă se cunoaște funcția $\vec{F}(x, y, z)$.

8.3. Exemple de calcul al energiei potențiale

Energia potențială a unui sistem poate fi determinată:

- 1) din relațiile (8.11)-(8.14), dacă se cunoaște forța potențială $\vec{F}(\vec{r})$,
- 2) din egalitatea (8.9), dacă se cunoaște lucrul forței potențiale.

Exemplul 1. Energia potențială a corpului, elastic deformat în sensul pozitiv al axei ox , adică supus acțiunii forței elastice $F = -kx$.

Din prima relație (8.12) rezultă diferențiala totală a energiei potențiale

$$dW_p = -F_x dx$$

În condițiile inițiale ale corpului nedeformat ce nu posedă energie potențială, $x_0 = 0$, $W_{p0} = 0$, prin integrarea ultimei relații se obține

$$W_p - W_{p0} = \Delta W_p = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{kx^2}{2}, \quad W_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (8.15)$$

Considerând aceleași condiții inițiale, formula (8.15) rezultă și din relația (8.9) în care se substituie (7.6).

Exemplul II. Energia potențială a punctului material într-un câmp de forțe centrale, orientate radial de la sau spre centrul câmpului care este și originea axei de coordonate, numită r .

Scriem relația (8.12) pentru axa r :

$$F_r = -\frac{\partial W_p}{\partial r} = -\frac{dW_p}{dr}, \text{ de unde } dW_p = -F_r dr.$$

Rezultatul integrării în limite arbitrare este:

$$W_{p2} - W_{p1} = \Delta W_p = -\int_{r_1}^{r_2} F_r dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\alpha}{r^2} dr = \frac{\alpha}{r_2} - \frac{\alpha}{r_1},$$

fiind folosită expresia pentru proiecția forței centrale (7.8) pe axa r . În condițiile inițiale $r_1 = \infty, W_{p1} = 0$, se obține:

$$W_{p2} = \frac{\alpha}{r_2}, \text{ sau } W_p = \frac{\alpha}{r}. \quad (8.16)$$

Același rezultat în aceleași condiții inițiale se obține, substituind relația (7.11) în (8.9). Înlocuind în formula (8.17) valorile lui α din expresiile (7.9) se obține energia potențială a punctului material:

$$W_p(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{în câmpul gravitațional}, \quad (8.17)$$

$$W_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r}, \quad (\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r) \quad \text{în câmpul electrostatic}. \quad (8.18)$$

Exemplul III. Energia potențială a punctului material în câmp gravitațional omogen.

Forța gravitațională omogenă este $F_z = -mg$. Din relația (8.12) rezultă:

$$dW_p = -F_z dz = mg dz$$

Rezultatul integrării acestei expresii este:

$$\Delta W_p = W_{p2} - W_{p1} = \int_{z_1}^{z_2} mg dz = mg(z_2 - z_1)$$

Considerăm condițiile inițiale: $z_1 = 0$ $W_{p_1} = 0$. Atunci:

$$W_{p_2} = W_{p_1} + mgz_2 = mgz_2, \quad W_p = mgz. \quad (8.19)$$

Este evident că relația (8.19) se poate obține și prin substituția formulei (7.13) în (8.9).

Aplicații. Probleme rezolvate.

Problema 1

Pe o suprafață netedă orizontală se află în repaus o scândură de masă m_1 , pe care se așează un corp de masă m_2 . Asupra corpului începe să acționeze o forță orizontală, variabilă în timp $F = kt$, unde k este o constantă. Să se determine dependențele de timp ale accelerațiilor scândurii și corpului. Coeficientul de frecare dintre scândură și corp este μ .

Rezolvare.

a) Considerăm intervalul de timp de la începutul acțiunii forței F până la momentul t_0 , în care începe alunecarea corpului m_2 pe suprafața scândurii. Până la începutul alunecării sistemul se mișcă ca întreg cu accelerația ce rezultă din legea fundamentală a dinamicii

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}, \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{kt}{m_1 + m_2}.$$

În momentul t_0 forța $F_0 = kt_0$ și accelerația ce îi corespunde

$$a_0 = \frac{kt_0}{m_1 + m_2} \text{ devin suficient de mari, astfel că}$$

$$m_2 a_0 = F_0 - F_f,$$

unde forța de frecare $F_f = \mu m_2 g$. Obținem,

$$m_2 \frac{kt_0}{m_1 + m_2} = kt_0 - \mu m_2 g,$$

$$t_0 = \frac{\mu m_2 g (m_1 + m_2)}{k m_1}.$$

b) Începând cu momentul t_0 corpul m_2 alunecă pe suprafața scândurii sub acțiunea forțelor $F = kt$ și $F_f = \mu m_2 g$. Prin urmare,

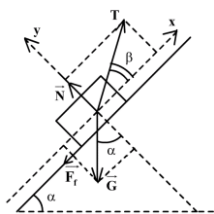
$$m_2 a_2 = kt - \mu m_2 g, \quad a_2 = \frac{kt}{m_2} - \mu g.$$

Asupra scândurii acționează forța $\vec{F}_f' = -\vec{F}_f$, orientată deci ca și $F = kt$.

$$m_1 a_1 = \mu m_2 g, \quad a_1 = \frac{\mu m_2 g}{m_1}.$$

Problema 2

Un corp de masă m , legat de un fir, este tras cu viteză constantă în sus pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ . Pentru ce valoare a unghiului dintre fir și planul înclinat forța de tensiune din fir este minimală? Să se determine valoarea acestei forțe.



Rezolvare

Sub acțiunea forțelor indicate pe figură corpul se deplasează rectiliniu uniform. Legea fundamentală a dinamicii se scrie în proiecții pe axele indicate:

$$T_x - G_x - F_f = 0,$$

$$N + T_y - G_y = 0,$$

unde $T_x = T \cos \beta$, $G_x = G \sin \alpha$, $T_y = T \sin \beta$, $G_y = G \cos \alpha$.

Din egalitatea a doua se determină F_f ,

$$N = G_y - T_y, \quad N = G \cos \alpha - T \sin \beta,$$

$$F_f = \mu N = \mu(G \cos \alpha - T \sin \beta).$$

Substituind această expresie în prima egalitate obținem

$$T \cos \beta - G \sin \alpha = \mu(G \cos \alpha - T \sin \beta),$$

$$T = \frac{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

Am obținut $T = T(\beta)$. Valoarea unghiului β , pentru care forța T este minimă, se determină din condiția $\frac{dT}{d\beta} = 0$. Pentru simplitate

vom nota

$$G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = k,$$

$$\frac{dT}{d\beta} = -\frac{k(-\sin \beta + \mu \cos \beta)}{(\cos \beta + \mu \sin \beta)^2} = 0,$$

$$-\sin \beta + \mu \cos \beta = 0, \quad \operatorname{tg} \beta = \mu.$$

Modificăm numitorul egalității pentru forța de tensiune substituind rezultatul de mai sus și folosind formulele trigonometrice

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}},$$

$$\cos \beta + \mu \sin \beta = \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Forța minimă de tensiune este

$$T = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Problema 3

O particulă de masă m începe a se mișca sub acțiunea forței $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$, unde \vec{F}_0 și ω sunt constante. Să se determine:

- Timpul de mișcare până la prima oprire;
- Distanța parcursă de particulă în acest timp;
- Viteza maximă a particulei pe această distanță.

Rezolvare.

a) Din principiul fundamental al dinamicii $F_0 \cos \omega t = ma$,

$$a = \frac{F_0 \cos \omega t}{m}.$$

Deoarece $a = \frac{dv}{dt}$, în rezultatul integrării obținem timpul de mișcare până la prima oprire.

$$F_0 \cos \omega t \, dt = m \, dv, \quad \int_0^t F_0 \cos \omega t \, dt = \int_0^v m \, dv,$$

$$\frac{F_0 \sin \omega t}{\omega} = mv, \quad v = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t.$$

Am obținut dependența de timp a vitezei particulei. În momentul opririi $v = 0$, $\sin \omega t = 0$. Prin urmare,

$$\omega t = \pi, \quad t = \frac{\pi}{\omega}.$$

b) În dependența de timp a vitezei substituim $v = \frac{dS}{dt}$ și integrăm egalitatea obținută.

$$ds = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \, dt, \Rightarrow \int_0^s ds = \frac{F_0}{m\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \, dt, \Rightarrow$$

$$S = \frac{F_0}{m\omega^2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \, d(\omega t) = -\frac{F_0 \cdot \cos \omega t}{m\omega^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega \frac{\pi}{\omega}) = \frac{2F_0}{m\omega^2}.$$

c) Viteza maximă pe această distanță se obține din dependența vitezei de timp cu condiția că $\sin \omega t = 1$:

$$v = v_{\max} = \frac{F_0}{m\omega}.$$

Problema 4

Un glonte, străbătând grosimea h a unei scânduri, își micșorează viteza de la v_0 la v . Să se afle timpul de mișcare a glontelui prin scândură, considerând forța de rezistență proporțională pătratului vitezei glontelui.

Rezolvare

Legea fundamentală a dinamicii, ce descrie mișcarea rectilinie încetinită a glontelui prin scândură sub acțiunea forței de rezistență $F_r = -kv^2$, se scrie

$$\begin{aligned} -kv^2 &= ma, \\ -kv^2 &= m \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt. \end{aligned}$$

Se integrează ultima egalitate în limitele v_0, v , respectiv $0, t$

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} &= -\frac{k}{m} \int_0^t dt, \quad -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m} t, \\ t &= \frac{m}{k} \cdot \frac{v_0 - v}{v v_0}. \end{aligned}$$

În expresia obținută pentru timpul t de mișcare a glontelui prin scândură este necunoscut factorul $\frac{m}{k}$. Îl vom determina folosind distanța parcursă h și dependența de timp a vitezei glontelui, dependență ce rezultă din penultima egalitate.

$$v = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0}}.$$

Totodată, $v = \frac{dS}{dt}$. Prin urmare,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}}, \quad dS = \frac{m}{k} \frac{d(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0})}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} dt.$$

Atunci când distanța S variază de la zero până la h , mărimea $(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0})$ variază de la $\frac{1}{v_0}$ la $\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}$.

$$\int_0^h dS = \frac{m}{k} \int_{\frac{1}{v_0}}^{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} \frac{d(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0})}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} dt, ,$$

$$h = \frac{m}{k} \cdot \ln \left(\frac{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_0}} \right) = \frac{m}{k} \ln v_0 \left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0} \right).$$

În egalitatea obținută se substituie expresia obținută pentru timpul de mișcare t .

$$h = \frac{m}{k} \ln v_0 \left[\frac{k}{m} \left(\frac{m}{k} \cdot \frac{v - v_0}{v v_0} \right) + \frac{1}{v_0} \right] = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v}, \quad \frac{m}{k} = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v}}.$$

În rezultat, timpul de mișcare al glontelui prin scândură devine:

$$t = \frac{h(v_0 - v)}{v v_0 \ln \frac{v_0}{v}}.$$

Problema 5

O particulă se mișcă în planul xy pe o traiectorie arbitrară din punctul 1 cu vectorul de poziție $\vec{r}_1 = \dot{i} + 2\vec{j}(m)$ până în punctul 2 cu vectorul de poziție $\vec{r}_2 = 2\dot{i} - 3\vec{j}(m)$. În timpul acestei mișcări

asupra particulei acționează mai multe forțe, una din ele fiind $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}(\text{N})$. Să se calculeze lucrul forței \vec{F} .

Rezolvare

Forța \vec{F} este constantă în timp, de aceea lucrul ei este dat de produsul scalar dintre \vec{F} și deplasarea $\Delta\vec{r}$, în care se substituie vectorii \vec{F} , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 . Produsul scalar se calculează conform (1.10)

$$\begin{aligned} A_{12} &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (3\vec{i} + 4\vec{j})[(2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j})] = \\ &= (3\vec{i} + 4\vec{j})(\vec{i} - 5\vec{j}) = 3 - 20 = -17\text{ J}. \end{aligned}$$

Problema 6

O particulă de masă m se mișcă pe un cerc de rază R , având accelerația normală, ce variază în timp conform legii $a_n = \alpha t^2$, unde α este o constantă. Să se determine dependența de timp a puterii tuturor forțelor, ce acționează asupra particulei, cât și valoarea medie a acestei puteri în t secunde de la începutul mișcării.

Rezolvare

Deoarece $a_n = \alpha t^2$ și, totodată, $a_n = \frac{v^2}{R}$ obținem,

$$\alpha t^2 = \frac{v^2}{R}, \quad v = t\sqrt{\alpha R}.$$

Dependența de timp a valorii a_n se datorează dependenței de timp a modulului vitezei v ($R = \text{const}$). Modulul vitezei v variază în timp datorită lucrului efectuat de forțele tangențiale, lucrul forțelor centripete fiind nul. Dependența de timp a modulului vitezei permite calculul accelerației tangențiale, deci și a forțelor tangențiale.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(t\sqrt{\alpha R}) = \sqrt{\alpha R},$$

$$F_{\tau} = ma_{\tau} = m\sqrt{\alpha R}.$$

Puterea momentană (7.5) se calculeze din relația

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = m\sqrt{\alpha R} \cdot t\sqrt{\alpha R} = \alpha m R t$$

Deoarece puterea momentană este direct proporțională timpului t , puterea medie în acest timp este

$$P_m = \frac{P}{2} = \frac{\alpha m R t}{2}.$$

Problema 7

Energia potențială a unei particule într-un câmp bidimensional este dată de expresia $W_p = \alpha x^2 + \beta y^2$, unde α, β sunt constante pozitive și $\alpha \neq \beta$. Să se determine:

- a) *dacă câmpul este central;*
- b) *ce formă au suprafețele echipotențiale, cît și suprafețele pentru care modulul vectorului forței $F = \text{const}$.*

Rezolvare

a) Câmpul este central dacă în orice punct forța satisface (7.7), adică vectorul forței trece prin originea sistemului de coordonate, iar modulul ei depinde numai de modulul vectorului de poziție $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Egalitățile (8.12) ne permit calculul proiecțiilor forței pe axele x și y .

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{\partial(\alpha x^2 + \beta y^2)}{\partial x} = -2\alpha x,$$

$$F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y} = -\frac{\partial(\alpha x^2 + \beta y^2)}{\partial y} = -2\beta y.$$

Atunci

$$\vec{F} = -2(\alpha x \vec{i} + \beta y \vec{j}), F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}.$$

Deoarece $\alpha \neq \beta$ este evident că \vec{F} nu satisface condițiile impuse unei forțe centrale.

b) Pentru o suprafață echipotențială $W_p = \text{const}$,

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{\alpha x^2}{\text{const}} + \frac{\beta y^2}{\text{const}} = 1.$$

Am obținut ecuația unei elipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$, pentru care

$$a^2 = \frac{\text{const}}{\alpha}, \quad b^2 = \frac{\text{const}}{\beta}, \text{ adică raportul semiaxelor este } \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

În mod analog determinăm că suprafețele pentru care $F = \text{const}$ reprezintă de asemenea elipse, dar cu alt raport al semiaxelor.

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \text{const}, \quad \frac{\alpha^2 x^2}{\text{const}} + \frac{\beta^2 y^2}{\text{const}} = 1,$$

$$a^2 = \frac{\text{const}}{\alpha^2}, \quad b^2 = \frac{\text{const}}{\beta^2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Problema 8

Un cablu flexibil cu lungimea L , având masa m pe unitatea de lungime, este trecut peste un scripete fără frecare, cu masa și raza neglijabile. Inițial, cablul este în echilibru. Se trage ușor de un capăt al cablului și acesta începe să se deplaseze accelerat. Să se calculeze viteza cablului în momentul în care celălalt capăt al cablului părăsește scripetele.

Rezolvare

Vom cerceta mișcarea cablului în raport cu axa de coordonate orientată verticală în sus, originea căreia este situată la distanța L mai jos de axa scripetului. La momentul inițial centrul de masă al cablului are coordonate $\frac{3}{4}L$, energia cinetică nulă

$W_{c1} = 0$, iar cea potențială este $W_{p1} = \frac{3}{4}mL^2g$ (mL este masa

întregului cablu). La momentul final centrul de masă al cablului are

coordonata $\frac{L}{2}$, energia cinetică $W_{c2} = \frac{mLv^2}{2}$, iar cea potențială $W_{p2} = \frac{1}{2}mL^2g$.

În timpul mișcării asupra cablului acționează doar forța gravitațională conservativă, prin urmare $-\Delta W_p = \Delta W_c$, sau

$$W_{c2} = W_{p1} - W_{p2}, \quad \frac{mgLv^2}{2} = \frac{3}{4}mgL^2 - \frac{1}{2}mgL^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

Întrebări de verificare

1. Se poate oare afirma că principiile mecanicii clasice se respectă cu strictețe în sistemul de referință, legat cu Pământul? Să se argumenteze răspunsul.
2. În ce constă esența determinismului mecanicii clasice? Exemple.
3. Să se definească lucrul mecanic, puterea medie, puterea momentană.
4. Să se calculeze lucrul mecanic al forței de respingere electrostatică, cu care câmpul sarcinii punctiforme, fixe q_0 acționează asupra sarcinii punctiforme q . Să se considere o traiectorie arbitrară a sarcinii q între pozițiile definite de vectorii \vec{r}_1 și \vec{r}_2 . Să se explice de ce forța electrostatică este: a) centrală; b) conservativă.
5. În baza teoremelor de variație a energiei cinetice și de variație a energiei potențiale să se deducă legea conservării energiei mecanice pentru un punct material.
6. Să se explice relația dintre forța conservativă și energia potențială a corpului, supus acțiunii acestei forțe.

**Dinamica sistemelor de puncte materiale

§9. Centrul de masă al sistemului de puncte materiale și legea mișcării lui

Forțele care acționează asupra punctelor materiale ale sistemului se împart în interne \vec{F}^i și externe \vec{F}^e . Forțele interne determină interacțiunile dintre punctele lui materiale, iar cele externe-dintre sistemul considerat și alte sisteme sau corpuri. Pentru un punct material de masa m_k , cu vector de poziție \vec{r}_k , ce face parte din sistemul considerat de N puncte materiale (fig 2.5, sistemul de referință \mathbf{K}) se scrie principiul fundamental:

$$\frac{d\vec{P}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i = \vec{F}_k^e + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{jk}, \quad (9.1)$$

\vec{P}_k – impulsul punctului material, \vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i – rezultanta forțelor externe, respectiv interne, care acționează asupra punctului material considerat:

$$\vec{F}_k^i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{jk} = \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{2k} + \dots + \vec{F}_{(j-1)k} + \vec{F}_{(j+1)k} + \dots + \vec{F}_{Nk}, \quad j \neq k.$$

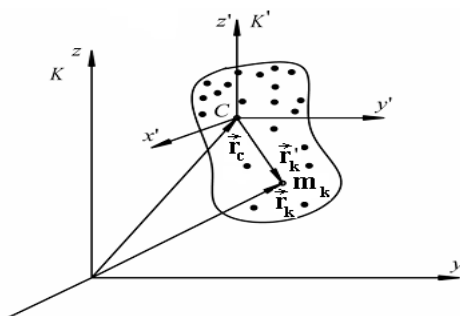


Fig.2.5

Prin scrierea și sumarea a N egalități de tipul (9.1), referitoare la toate punctele materiale ale sistemului, se obține:

$$\sum_{k=1}^N \frac{d\vec{P}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i = \vec{F}, \quad (9.2)$$

unde \vec{F} este forța rezultantă ce acționează asupra sistemului. Forțele interne se exercită totdeauna în perechi, cu respectarea principiului acțiunii și reacțiunii,

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}, \quad \vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} = 0 \quad k \neq j.$$

Prin urmare, suma forțelor interne, de interacțiune dintre toate punctele materiale ale sistemului, este nulă.

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{jk} = 0, \quad j \neq k. \quad (9.3)$$

Folosind acest rezultat și modificând partea stângă a egalității (9.2), rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{d\vec{P}_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{P}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e = \vec{F}^e = \vec{F}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

unde \vec{F}^e este rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului de puncte materiale. A treia egalitate din (9.4) sugerează ideea definirii pentru sistemul de puncte materiale în raport cu sistemul de referință inerțial arbitrar K , a noțiunii de *centru de masă* C cu vectorul de poziție \vec{r}_c (fig.2.5)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N m_k} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{m}, \quad (9.5)$$

unde $m = \sum_{k=1}^N m_k$ reprezintă masa sistemului. Substituind definiția (9.5) în (9.4) se obține:

$$\vec{F}^e = m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2}. \quad (9.6)$$

Egalitatea (9.6) poartă denumirea de *lege a mișcării centrului de masă* al unui sistem de puncte materiale: centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mișcă astfel ca și cum în el ar fi concentrată toată masa sistemului și asupra lui ar acționa rezultanta forțelor externe. Pe această lege se bazează asimilarea mișcării de translație a unui sistem de puncte cu mișcarea unui singur punct material – anume centrul de masă al sistemului de puncte materiale.

Derivând egalitatea (9.5) în raport cu timpul se obține viteza centrului de masă:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k}{m}. \quad (9.7)$$

Dacă $\vec{F}^e = 0$ din relația (9.6) rezultă:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} \right) = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0, \quad \vec{v}_c = c\text{onst}. \quad (9.8)$$

Condiția $\vec{F}^e = 0$ definește un *sistem izolat de puncte materiale*. Conform egalității (9.8) centrul de masă al unui sistem izolat de puncte materiale se mișcă rectiliniu și uniform sau rămâne în repaus dacă rezultanta forțelor externe este nulă. Evident, această lege a mișcării centrului de masă a sistemului izolat se realizează în raport cu un sistem de referință inerțial (ca și principiul fundamental al mecanicii, utilizat la deducerea legii).

§10. Teorema variației și legea conservării impulsului

Considerăm sistemul de puncte materiale din fig 2.5 în raport cu sistemul de referință K . *Impulsul sistemului de puncte*

materiale reprezintă suma vectorială a impulsurilor tuturor punctelor materiale din sistem

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^N \vec{P}_k = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k . \quad (10.1)$$

și se mai poate exprima prin viteza centrului de masă (a se vedea definiția (9.7)):

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_c) = m \vec{v}_c . \quad (10.2)$$

Să calculăm impulsul sistemului de puncte materiale în raport cu sistemul de referință al centrului de masă (fig 2.5, sistemul de referință K') în raport cu care vectorul de poziție al unui punct material k este:

$$\vec{r}_k' = \vec{r}_k - \vec{r}_c \text{ sau } m_k \vec{r}_k' = m_k \vec{r}_k - m_k \vec{r}_c .$$

Scriind astfel de relații pentru toate punctele materiale ale sistemului și sumându-le, se obține:

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k' = \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k - \vec{r}_c \sum_{k=1}^N m_k .$$

Din definiția (9.5) avem $\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k = m \vec{r}_c$. Prin urmare,

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k' = 0, \quad \vec{P}' = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k' = 0, \quad (10.3)$$

adică impulsul sistemului de puncte materiale în raport cu sistemul de referință al centrului de masă este egal cu zero.

Substituind formula (10.1) în egalitatea (9.4) se obține teorema *variației impulsului unui sistem de puncte materiale* în raport cu un sistem arbitrar inerțial de referință:

$$\vec{F}^e = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{P}_k = \frac{d \vec{P}}{dt} . \quad (10.4)$$

Derivata în raport cu timpul de la impulsul sistemului de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului. Dacă $\vec{F}^e = 0$, atunci

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0; \quad \vec{P} = \overline{const}. \quad (10.5)$$

Relațiile (10.5) reprezintă *legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale*: dacă rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului este egală cu zero impulsul sistemului rămâne constant în timp. Sau: impulsul unui sistem izolat de puncte materiale rămâne constant în timp. Bineînțeles că impulsul oricărui punct material din sistem poate varia în timp sub acțiunea forțelor interne, adică impulsul sistemului se redistribuie între punctele sale materiale, rămânând constant pentru întreg sistemul.

Matematicianul german Noether a arătat că în cazul unui sistem izolat fiecărei operații de simetrie a spațiului și timpului îi corespunde o lege de conservare a unei mărimi fizice. Din proprietatea de omogenitate a spațiului rezultă că starea unui sistem mecanic izolat nu trebuie să se schimbe la o translație în spațiu a întregului sistem. Translația în spațiu este o operație de simetrie și, conform teoremei Noether și metodei lui generale de obținere a mărimilor care se conservă, s-a dedus că acestei operații îi corespunde conservarea impulsului sistemului mecanic izolat. Deci, în mecanica analitică se demonstrează că legea conservării impulsului unui sistem este o consecință a proprietății de omogenitate a spațiului, adică este o lege universală a naturii.

§11. Teorema variației și legea conservării momentului impulsului

Studierea mișcării de rotație a corpurilor necesită introducerea a două mărimi fizice noi: momentul forței și momentul impulsului (moment cinetic). Momentul forței servește drept măsură vectorială a efectului de rotație a corpului, produs de o forță ce acționează asupra lui. Momentul impulsului este

nemijlocit legat de momentul forței și, în anumite condiții, respectă o lege universală de conservare.

11.1. Momentul forței. Momentul impulsului (momentul cinetic) unui punct material

Considerăm un corp, prevăzut cu o articulație fixă (punctul O, fig.2.6.a) în jurul căreia se poate roti liber. Acționând asupra unui punct al corpului cu forța \vec{F} , corpul se rotește în jurul unei axe ce trece prin articulație și este perpendiculară pe planul definit de ea și vectorul forței. Accelerația unghiulară, imprimată corpului, este direct proporțională atât cu modulul forței cât și cu distanța dintre suportul forței și punctul O, numită brațul forței și egală cu $d = r \sin \beta$ (fig.2.6.a). În consecință, se impune următoarea definiție: *momentul forței în raport cu un punct* (deseori numit pol) este o mărime fizică vectorială egală cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al forței față de același punct și vectorul forță,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (11.1)$$

cu modulul

$$M = rF \sin \beta = F \cdot d, \quad (11.2)$$

cu direcția perpendiculară pe planul definit de vectorii \vec{r} și \vec{F} și cu sensul determinat de regula burghiului drept. Din formulele (11.1) și (11.2) urmează că momentul forței este maxim când forța este perpendiculară pe vectorul de poziție,

$$\vec{r} \perp \vec{F}, \quad r = d, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad M = rF,$$

și este egal cu zero când suportul forței coincide cu vectorul de poziție :

$$\vec{F} \parallel \vec{r}, \quad d = 0, \quad \beta = 0, \quad M = 0.$$

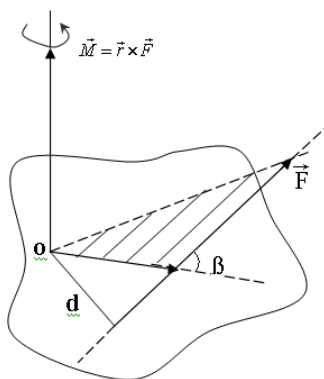


Fig.2.6.a

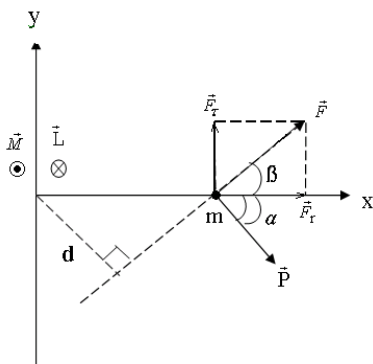


Fig.2.6.b

Pentru $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ forța \vec{F} poate fi descompusă pe componente. Pe figura 2.6.b este ilustrată situația când vectorii \vec{r} , \vec{F} , \vec{P} sunt în planul foii și \vec{F} are două componente: $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t$. În această situație momentul forței devine:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_t + \vec{r} \times \vec{F}_r = \vec{r} \times \vec{F}_t, \quad \vec{r} \times \vec{F}_r = 0, \quad (11.3)$$

$$M = rF_t. \quad (11.4)$$

Momentul impulsului unui punct material în raport cu un punct este egal cu produsul vectorial dintre vectorul său de poziție față de același punct și vectorul impuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (11.5)$$

$$L = rP \sin \alpha. \quad (11.5')$$

Direcția vectorului \vec{L} este perpendiculară pe planul definit de \vec{r} , \vec{P} , iar sensul se determină conform regulii burghiului drept (fig.2.6.b).

În baza unor raționamente similare celor referitoare la momentul forței se ajunge la concluzia

$$L = L_{\max} = mrv \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{2},$$

(exemplu: momentul impulsului punctului material în mișcare circulară, calculat în raport cu centrul cercului) și:

$$L = 0 \text{ pentru } \alpha = 0$$

(exemplu: momentul impulsului punctului material în mișcare rectilinie în lungul axei \vec{r} , calculat în raport cu un punct de pe această axă).

Să stabilim relația dintre momentul impulsului unui punct material și momentul forței ce îi este aplicată. Conform relației (6.1) produsul vectorial dintre \vec{r} și \vec{F} este:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} . \quad (11.6)$$

Deoarece

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} ,$$

se obține:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) . \quad (11.7)$$

În relația (11.7) se substituie egalitățile (11.1) și (11.5). Se obține:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \quad (11.8)$$

Relația (11.8) se numește *teorema variației momentului impulsului unui punct material*. Dacă momentul forței rezultante este egal cu zero, $\vec{M} = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \vec{L}(t) = \text{const} . \quad (11.9)$$

Formula (11.9) constituie *legea conservării momentului impulsului unui punct material*: dacă momentul forței rezultante este nul, momentul impulsului unui punct material rămâne constant în timp.

În calitate de exemplu de aplicare a legii conservării momentului impulsului punctului material vom analiza mișcarea

punctului material într-un câmp central de forțe. Forța centrală ce acționează asupra punctului material este orientată pe direcția vectorului de poziție \vec{r} trasat din centrul câmpului de forțe, deci momentul ei este egal cu zero. Urmează că vectorul momentului impulsului punctului material se conservă. Totodată, vectorii \vec{r} și \vec{L} sunt reciproc perpendiculari, de aceea în timpul mișcării punctului material vectorul său de poziție \vec{r} se află mereu în unul și același plan. Prin urmare, planul de mișcare a punctului material aflat într-un câmp de forțe centrale se conservă. Dacă se calculează aria suprafeței „măsurate” de vectorul de poziție în unitatea de timp (așa – numita viteză areolară) se constată că ea este constantă, adică vectorul de poziție „mătură” arii egale în intervale de timp egale. Această afirmație constituie conținutul legii a doua a lui Kepler.

Condițiile inițiale (\vec{r}_0, \vec{v}_0) și semnul proiecției forței centrale determină traiectoria plană a punctului material, care poate fi hiperbolă, parabolă sau elipsă. Traiectoria hiperbolică se realizează în cazul difuziei particulelor α (He^{++}) în câmpul coulombian al nucleului atomic. Traiectoria parabolică sau eliptică se întâlnește în modelul planetar al atomului (Rutherford, Bohr).

11.2. Momentul impulsului unui sistem de puncte materiale. Teorema variației și legea conservării momentului impulsului

Momentul impulsului sistemului de puncte materiale se definește ca suma momentelor impulsului tuturor punctelor materiale din sistem:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{L}_k = \sum (\vec{r}_k \times \vec{P}_k) \quad . \quad (11.10)$$

Pentru deducerea teoremei variației momentului impulsului sistemului se înmulțește vectorial egalitatea (9.1) cu vectorul de poziție al punctului material respectiv, trasat în raport cu originea sistemului de coordonate (fig.2.7).

$$\vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \sum_{j=1}^N \vec{F}_{jk} . \quad (11.11)$$

Se ştie că \vec{F}_{jk} este o forţă internă, de interacţiune dintre punctele materiale ale sistemului .Scriind relaţii de tipul (11.11) pentru toate punctele materiale şi sumându-le, obţinem:

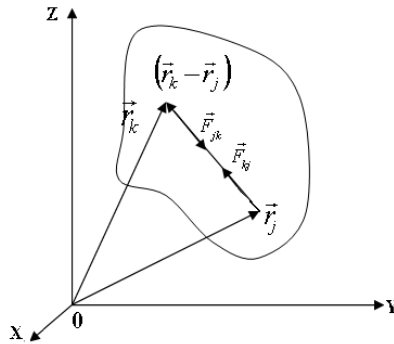


Fig. 2.7

$$\sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e \right) + \sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \sum_{j=1}^N \vec{F}_{jk} \right) , \quad j \neq k . \quad (11.12)$$

Partea stângă a (11.12) poate fi scrisă:

$$\sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_k \times \vec{P}_k \right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \vec{P}_k \right) = \frac{d\vec{L}}{dt} , \quad (11.13)$$

dacă, în prealabil, se observă că:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r}_k \times \vec{P}_k \right) = \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times \vec{P}_k + \vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt} = \vec{v}_k \times \vec{P}_k + \vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt} = \vec{r}_k \times \frac{d\vec{P}_k}{dt}$$

și se substituie (11.10).

Să scriem detaliat termenul al doilea din partea dreaptă a (11.12). Pentru simplitate considerăm $N = 3$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^3 \left(\vec{r}_k \times \sum_{j=1}^3 \vec{F}_{jk} \right) &= \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \right) + \vec{r}_3 \times \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \right) = \\
 &= \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \right) + \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{13} \right) + \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{32} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23} \right) = \\
 &= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right) \times \vec{F}_{21} + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_3 \right) \times \vec{F}_{31} + \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3 \right) \times \vec{F}_{31}. \quad (11.14)
 \end{aligned}$$

Așadar, acest termen se exprimă ca suma a N perechi de vectori de tipul: $(\vec{r}_k \times \vec{F}_{jk} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj})$ pentru care $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$ (principiul 3 al dinamicii). Însă, conform figurii 2.7 vectorii ce se înmulțesc din partea dreaptă a (11.14) sunt coliniari, deci produsul lor vectorial este egal cu zero.

Prin urmare, expresia (11.14), care reprezintă termenul al doilea din (11.12), este egală cu zero. Atunci egalitatea (11.12) în care se substituie (11.13) devine:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e \right). \quad (11.15)$$

Conform definiției (11.1) mărimea fizică $\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e = \vec{M}_k^e$ reprezintă momentul resultant al forțelor externe care acționează asupra punctului material considerat, iar

$$\sum_{k=1}^N \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e \right) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^e = \vec{M}^e \quad (11.16)$$

este *momentul resultant al forțelor externe* care acționează asupra sistemului de puncte materiale. Substituind egalitatea (11.16) în (11.15) se obține

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e. \quad (11.17)$$

Formula (11.17) reprezintă *teorema variației momentului impulsului unui sistem de puncte materiale*: derivata în raport cu

timpul de la momentul impulsului sistemului de puncte materiale față de un punct arbitrar este egală cu momentul rezultat al forțelor externe care acționează asupra sistemului, în raport cu același punct. Dacă $\vec{M}^e = 0$, atunci

$$\vec{L} = \overrightarrow{const.} \quad (11.18)$$

Relația (11.18) exprimă *legea conservării momentului impulsului sistemului de puncte materiale*: dacă momentul rezultat al forțelor externe care acționează asupra sistemului este nul, atunci momentul impulsului sistemului rămâne constant în timp.

În mecanică spațiul se postulează ca fiind omogen și izotrop. În rezultatul izotropiei spațiului proprietățile mecanice ale unui sistem izolat rămân neschimbate la efectuarea unei rotații a întregului sistem. Prin urmare, rotația este o operație de simetrie și, conform teoremei Noether, îi corespunde o lege de conservare a unei mărimi fizice. În mecanica analitică se deduce că această mărime fizică este momentul impulsului unui sistem mecanic izolat. Deci, legea (11.18), dedusă în acest paragraf pe baza principiilor mecanicii clasice, este o urmare a proprietății de izotropie a spațiului, deci este o lege fundamentală a naturii.

§12. Teorema variației și legea conservării energiei mecanice

12.1. Energia cinetică a sistemului de puncte materiale.

Se consideră cazul general când asupra fiecărui punct material al sistemului acționează forțe rezultante conservative \vec{F}_k^e externă staționară și \vec{F}_k^i internă, cât și forța neconservativă rezultantă \vec{F}_k^{nc} . Sub acțiunea forțelor indicate punctul material de masă m_k are deplasarea elementară $d\vec{r}_k$ față de sistemul de referință inerțial K în intervalul de timp dt (fig.2.5). Se scrie lucrul mecanic elementar efectuat de toate forțele susnumite asupra punctului material k (a se vedea (7.1)),

$$\delta A_k = \vec{F}_k^e d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{nc} d\vec{r}_k = \vec{F}_k d\vec{r}_k ,$$

unde

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{nc} , \quad (12.1)$$

și asupra întregului sistem:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{nc} d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k d\vec{r}_k . \quad (12.2)$$

Lucrul elementar δA este egal cu diferențiala energiei cinetice dW_c a sistemului (a se vedea (8.4)):

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^N d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dW_c . \quad (12.3)$$

unde *energia cinetică* W_c a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor materiale din sistem:

$$W_c = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} . \quad (12.4)$$

Analizând prima egalitate din (12.2) se constată: primul termen reprezintă lucrul elementar al forțelor externe conservative,

$$dA^e = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e d\vec{r}_k , \quad (12.5)$$

al doilea –lucrul elementar al forțelor interne conservative

$$dA^i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i d\vec{r}_i , \quad (12.6)$$

al treilea –lucrul elementar al forțelor neconservative

$$\delta A^{nc} = \sum_{lk=1}^N \vec{F}_k^{nc} d\vec{r}_k . \quad (12.7)$$

Se substituie expresiile (12.3), (12.5) – (12.7) în (12.2) și se obține:

$$dW_c = dA^e + dA^i + \delta A^{nc} . \quad (12.8)$$

Diferențiala energiei cinetice totale a sistemului de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale forțelor conservative interne, conservative externe și ale forțelor neconservative.

Prin integrarea egalității (12.8) în limitele corespunzătoare stărilor 1 și 2 ale sistemului rezultă *teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale*:

$$\Delta W_c = \int_1^2 dA^e + \int_1^2 dA^i + \int_1^2 \delta A^{nc}. \quad (12.8')$$

Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate de toate forțele externe și interne în timpul respectiv. Comparând această teoremă de variație a energiei cinetice cu teoremele de variație ale altor mărimi fizice devine evidentă deosebirea: numai în teorema variației energiei cinetice figurează atât forțele externe, cât și cele interne.

Pentru orice punct material al sistemului se poate scrie relația (fig.2.5):

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k' + \vec{r}_c,$$

unde \vec{r}_k, \vec{r}_k' sunt vectori de poziție ai punctului material față de sistemul de referință K , respectiv K' ; \vec{r}_c este vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului față de sistemul de referință K . Prin derivare se obține:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_k'}{dt} + \frac{d\vec{r}_c}{dt}, \quad \text{adică} \quad \vec{v}_k = \vec{v}_k' + \vec{v}_c.$$

Această relație se substituie în (12.4):

$$\begin{aligned} W_c &= \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \left(\vec{v}_k' + \vec{v}_c \right)^2 = \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\vec{v}_k')^2}{2} + \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_c + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \vec{v}_c^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{m_k (v_k')^2}{2} + \vec{v}_c \cdot \vec{P}' + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} v_c^2, \end{aligned} \quad (12.9)$$

unde \vec{v}_k, \vec{v}_k' este viteza punctului material în raport cu K respectiv K' ; \vec{v}_c este viteza centrului de masă al sistemului în raport cu K ; $\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k' = \vec{P}'$ este impulsul sistemului de puncte materiale în raport

cu K' . Conform expresiei (10.3) $\vec{P}'=0$. Astfel s-a ajuns la egalitatea

$$W_c = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k'^2}{2} + \frac{v_c}{2} \sum_{k=1}^N m_k = W_c' + \frac{mv_c^2}{2}, \quad (12.10)$$

conform căreia energia cinetică a unui sistem de puncte materiale față de un sistem de referință inerțial arbitrar conține doi termeni: energia cinetică a punctelor materiale față de sistemul de referință

al centrului de masă $W_c' = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k'^2}{2}$ și energia cinetică a mișcării

centrului de masă al sistemului $\frac{mv_c^2}{2}$.

12.2. Teorema variației și legea conservării energiei mecanice

Aplicând teorema variației energiei potențiale (8.6) pentru lucrurile elementare ale forțelor conservative externe (12.5) și interne (12.6) obținem că acestea sunt egale cu diferențialele, luate cu semn opus, de la energiile potențiale ale sistemului în câmpul forțelor conservative externe și respectiv de interacțiune reciprocă a punctelor materiale ale sistemului:

$$dA^e = -dW_p^e, \quad (12.11)$$

$$dA^i = -dW_p^i. \quad (12.12)$$

Atunci egalitatea (12.8) devine:

$$dW_c + dW_p^e + dW_p^i = \delta A^{nc}, \quad d(W_c + W_p^e + W_p^i) = \delta A^{nc}. \quad (12.13)$$

Suma

$$W_c + W_p^e + W_p^i = W_m, \quad (12.14)$$

se numește *energie mecanică totală a sistemului de puncte materiale*. Prin urmare, *forma diferențială a teoremei variației energiei mecanice totale a unui sistem de puncte materiale este:*

$$dW_m = \delta A^{nc}. \quad (12.15)$$

Diferențiala energiei mecanice totale a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul rezultat elementar al forțelor

neconservative ce acționează asupra sistemului. Forma integrală a acestei teoreme se obține prin integrarea egalității (12.15) în limitele, cărora le corespund stările 1 și 2 ale sistemului:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = A_{12}^{nc}. \quad (12.15')$$

Variația energiei mecanice totale a sistemului este egală cu lucrul rezultat al forțelor neconservative aplicate sistemului. Menționăm, că forțele conservative externe s-au considerat staționare.

Conform egalităților (12.15) și (12.15'), lucrul forțelor neconservative disipative (de exemplu, al forțelor de frecare), fiind întotdeauna negativ, micșorează energia mecanică a sistemului considerat, numit și disipativ. În procesul disipației are loc transformarea energiei mecanice a sistemului în alte forme de energie cu respectarea legii universale a conservării energiei.

Sistemul de puncte materiale se numește conservativ dacă lucrul rezultat al forțelor neconservative, ce acționează asupra sistemului, este egal cu zero (forțele conservative externe sunt staționare). Pentru un sistem conservativ $\delta A^{nc} = 0$ și din egalitatea (12.15) urmează:

$$dW_m = 0; \quad W_m = \text{const.} \quad (12.16)$$

Relațiile (12.16) reprezintă *legea conservării energiei mecanice totale*: energia mecanică totală a unui sistem conservativ este constantă în timp. În particular este constantă în timp energia mecanică a unui sistem conservativ izolat.

Legile fundamentale ale conservării energiei mecanice și a impulsului unui sistem de puncte materiale au multiple aplicații, inclusiv la calculul ciocnirilor corpurilor și la determinarea condițiilor de echilibru ale sistemelor de puncte materiale.

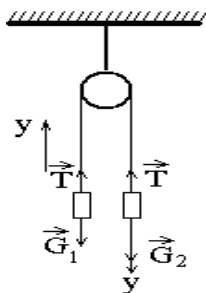
În mecanică timpul se consideră uniform, ceea ce înseamnă că legile mișcării unui sistem mecanic sunt invariabile în raport cu translarea sistemului în timp. În mecanica analitică se deduce că translarea în timp este o operație de simetrie, căreia îi corespunde o lege de conservare. Aplicând metoda dezvoltată de Noether se obține legea de conservare a energiei mecanice a unui sistem mecanic conservativ.

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1

Peste un scripete fix este trecut un fir, de capetele căruia atârnă doua corpuri de masa m_1 și respectiv m_2 . Neglijând masele scripetelui și a firului, cât și frecarea, să se calculeze accelerația centrului de masă.

Rezolvare



Se știe că centrul de masă al scripetelui se mișcă ca un punct material, masa căruia este egala cu masa întregului sistem și asupra căruia acționează aceleași forțe externe ca și asupra sistemului. În rezultat, pentru sistemul format din corpurile m_1 și m_2 scriem

$$(m_1 + m_2)a_c = G_2 + G_1 - 2T,$$

unde $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, iar T este forța de tensiune din fir, ce urmează a fi determinată. Pentru aceasta scriem legea fundamentală a dinamicii pentru fiecare din corpuri.

$$m_2 g - T = m_2 a,$$

$$T - m_1 g = m_1 a.$$

Rezolvând acest sistem, obținem

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Se substituie acest rezultat în expresia pentru centrul de masă și îi determinăm accelerația a_c .

$$(m_1 + m_2)a_c = g(m_1 + m_2) - \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \quad a_c = g \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Problema 2

Două cărucioare identice, de masă M fiecare, se mișcă unul după altul cu aceeași viteză \vec{v}_0 . Pe căruciorul din spate se află un om de masă m . Omul sare în căruciorul din față, având în momentul aterizării viteza u față de căruciorul din spate. Să se calculeze vitezele cărucioarelor după săritura omului.

Rezolvare

Vom considera că după săritura omului, vitezele cărucioarelor sunt \vec{v}_1 pentru cel din spate și \vec{v}_2 pentru cel din față, ambele viteze fiind orientate la fel ca \vec{v}_0 și \vec{u} . În absența forțelor externe pe direcția mișcării corpurilor vom recurge la legea conservării impulsului. Scriem această lege pentru sistemul format din căruciorul din spate și om, în raport cu suprafața pe care se mișcă corpurile.

$$(m + M)v_0 = m(v_1 + u) + Mv_1,$$

de unde

$$v_1 = v_0 - \frac{mu}{M + m}.$$

Scriem legea conservării impulsului pentru sistemul, format din căruciorul din față și om, în raport cu aceeași suprafață.

$$Mv_0 + m(v_1 + u) = (M + m)v_2,$$

de unde

$$v_2 = \frac{Mv_0 + m(v_1 + u)}{M + m}.$$

Se substituie în ultima egalitate expresia pentru v_1 . Obținem:

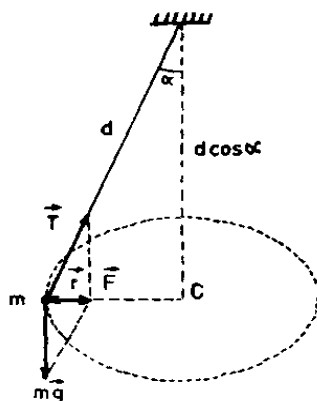
$$v_2 = v_0 + \frac{mMu}{(M + m)^2}.$$

Problema 3

Se consideră un pendul conic cu următoarele caracteristici: particula de masă m , lungimea firului l , deschiderea unghiulară a conului 2α .

Să se determine momentul impulsului particulei în raport cu centrul c al cercului descris de ea, cât și variația în unitatea de timp a momentului impulsului particulei în raport cu punctul de suspensie (punctul o).

Rezolvare



În timpul rotației uniforme a particulei pe cercul de raza r forța rezultantă ce acționează asupra ei este forța centripetă \vec{F} .

$$\vec{T} + m\vec{g} = \vec{F}.$$

Deoarece $F = -m\omega^2 r$ (ω - viteza unghiulară), momentul acestei forțe în raport cu punctul c este nul

$$\vec{M}_c = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (-m\omega^2 \vec{r}) = 0,$$

iar momentul impulsului particulei în raport cu acest punct este constant

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = 0, \vec{L}_c = \text{const}.$$

În conformitate cu definiția (11.5), calculăm $|\vec{L}_c|$

$$|\vec{L}_c| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m\mathbf{vr} = m\omega r^2, (\sin(\vec{v}, \vec{r}) = 1).$$

Deoarece $tg \alpha = \frac{F}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \omega^2 \frac{r}{g}$, determinăm consecutiv ω

și $|\vec{L}_c|$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}} = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{l \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}},$$

$$|L_c| = m \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} (l \sin \alpha)^2 = m \sqrt{\frac{gl^3}{\cos \alpha}} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Variația în unitatea de timp a momentului impulsului în raport cu punctul o este egală cu momentul forței de greutate în raport cu acest punct, momentul forței \vec{T} în raport cu punctul o fiind nul.

$$\left| \frac{d\vec{L}_0}{dt} \right| = |\vec{M}_0| = mgl \sin \alpha.$$

Problema 4

O particulă de masă m , legată de un centru fix printr-un fir de lungime r_0 , execută o mișcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted (fără frecări) având viteza v_0 . Firul poate fi scurtat trăgându-l prin centrul fix. Să se afle viteza particulei după scurtarea firului și lucrul mecanic care s-a efectuat prin scurtarea firului până la lungimea r .

Rezolvare

Firul este scurtat sub acțiunea unei forțe ce trece prin centrul fix al cercului descris de particulă, deci momentul acestei forțe față de centru este nul. Prin urmare, momentul impulsului particulei este constant în timp

$$mv_0 r_0 = mvr,$$

de unde

$$v = \frac{v_0 r_0}{r}.$$

Teorema variației energiei cinetice permite calculul lucrului efectuat la scurtarea firului,

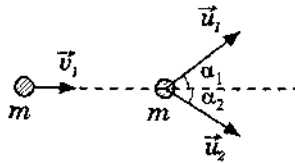
$$A = \Delta W_c = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right].$$

Problema 5

Un corp ciocnește un alt corp de aceeași masă, aflat în repaus. Să se arate că unghiul format de direcțiile vitezelor după ciocnire este: a) egal cu $\pi/2$ dacă ciocnirea este perfect elastică; b) diferit de $\pi/2$ dacă ciocnirea este plastică.

Rezolvare:

Se notează cu α_1 și α_2 direcțiile vitezelor după ciocnire față de



direcția inițială a vitezei primului corp. Teorema conservării impulsului proiectată pe axe indicate se scrie:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 \cos \alpha_1 + m_2 u_2 \cos \alpha_2$$

$$0 = m_1 u_1 \sin \alpha_1 - m_2 u_2 \sin \alpha_2$$

Ridicând la pătrat și adunând aceste două ecuații, rezultă:

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 + 2 m_1 m_2 u_1 u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - 2 m_1 m_2 u_1 u_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 + 2 m_1 m_2 u_1 u_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

S-au folosit relațiile trigonometrice:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ținând cont că $m_1 = m_2$, obținem

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{v_1^2 - (u_1^2 + u_2^2)}{2u_1 u_2},$$

a) În cazul ciocnirii perfect elastice se respectă legea conservării energiei cinetice:

$$\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

de unde $\mathbf{v}_1^2 = u_1^2 + u_2^2$ și $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$. Deci $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

b) În cazul ciocnirii plastice $\mathbf{v}_1 \neq u_1^2 + u_2^2$ și $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$.

Deci $\alpha_1 + \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$.

Întrebări de verificare

1. Să se formuleze legea mișcării centrului de masă al unui sistem de puncte materiale. Ce mișcare efectuează centrul de masă al unui sistem izolat de puncte materiale?
2. Ce condiții se respectă și în care sisteme de referință sunt juste afirmațiile:
a) impulsul unui sistem arbitrar de puncte materiale este egal cu zero;
b) impulsul unui sistem arbitrar de puncte materiale se conservă?
3. Să se definească, în raport cu un punct, vectorul momentul forței și vectorul momentul impulsului. Să se indice condițiile în care fiecare din acești vectori: a) are modul maxim; b) este egal cu zero.
4. Să se deducă că planul de mișcare a unui punct material, supus acțiunii forței centrale, se conservă.
5. Să se formuleze legile conservării: a) momentului impulsului; b) energiei mecanice totale pentru un sistem de puncte materiale. Care din aceste legi se respectă, dacă sistemul este izolat? De ce legile susnumite, cât și legea conservării impulsului, deduse în cadrul restrâns al mecanicii clasice, sunt legi fundamentale ale naturii ?

*****Dinamica solidului rigid în mișcare de rotație în jurul axei fixe**

Corpul rigid este un sistem continuu de puncte materiale, situate unul față de altul la distanțe invariabile în timp, ceea ce înseamnă că: lucrul mecanic efectuat de forțele interne este egal cu zero; energia potențială de interacțiune între punctele materiale ale rigidului este constantă în timp, independent de starea de mișcare a rigidului; corpurilor solide rigide li se pot aplica toate definițiile mărimilor fizice și teoremele sistemelor de puncte materiale, examinate în §§9-12.

§13. Momentul impulsului rigidului. Legea fundamentală a dinamicii rigidului în rotație în jurul axei fixe

13.1. Momentul impulsului rigidului

Sub acțiunea unui moment resultant al forțelor externe corpul rigid efectuează, în general, o mișcare variată de rotație în jurul unei axe fixe sau libere. În cele ce urmează se va cerceta cazul rotației solidului rigid în jurul unei axe fixe (a se vedea §5.2.), când fiecare punct al corpului descrie într-un plan perpendicular pe axa de rotație un cerc, a cărui rază R_k reprezintă distanța de la punctul material considerat pînă la axa de rotație.

Viteza liniară a unui punct material k se calculează conform relațiilor (5.1) și (5.2), adică:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_k &= R_k \boldsymbol{\omega} \\ R_k &= r_k \sin \beta_k \\ \bar{\mathbf{v}}_k &= \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_k \end{aligned} \right\}; \quad (13.1)$$

impulsul său este $\vec{P}_k = m_k \vec{v}_k$, iar momentul impulsului în raport cu originea O a sistemului de coordonate (fig 2.8) se definește prin expresia (11.5):

$$\left. \begin{aligned} \vec{L}_k &= \vec{r}_k \times \vec{P}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k, \\ L_k &= r_k m_k v_k, \angle(\vec{r}_k, \vec{v}_k) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (13.2)$$

Vectorul \vec{L}_k este perpendicular pe planul format de \vec{r}_k și \vec{v}_k și descrie în timpul rotației punctului material un con cu baza perpendiculară pe axa de rotație (fig 2.8). Proiecția \vec{L}_k pe axa z (fig. 2.8) se scrie:

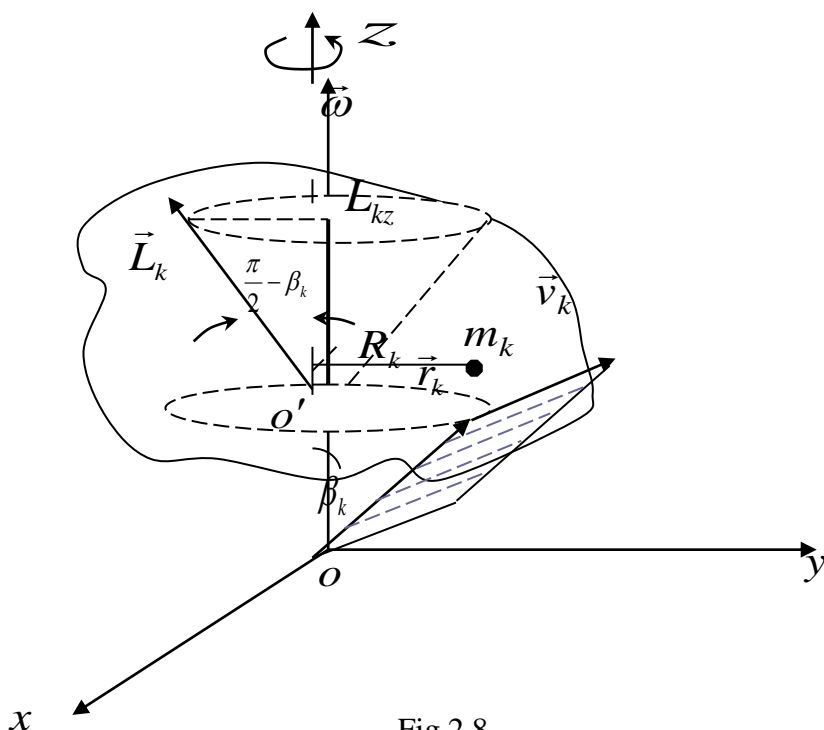


Fig.2.8

$$\begin{aligned} L_{kz} &= m_k r_k v_k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_k\right) = m_k r_k v_k \sin \beta_k = \\ &= m_k (r_k \sin \beta_k) R_k \omega = m_k R_k^2 \omega, \end{aligned} \quad (13.2)$$

($\vec{L}_k \perp \vec{r}_k$, prin urmare, unghiul format de \vec{L}_k cu axa oz este $\pi/2 - \beta_k$), dacă se folosesc prima și a doua egalitate din (13.1).

Momentul impulsului rigidului \vec{L} reprezintă suma vectorială a momentelor impulsurilor punctelor materiale componente (§11.2, formula 11.1). În general \vec{L} nu este paralel cu axa de rotație deoarece nici momentele \vec{L}_k nu posedă această proprietate, dar are o proiecție pe ea calculată conform relației:

$$L_z = \sum_{k=1}^N L_{kz} = \sum_{k=1}^N m_k R_k^2 \omega = \omega \sum_{k=1}^N m_k R_k^2, \quad (13.4)$$

numită *momentul impulsului rigidului față de axa considerată*.

Mărimea fizică

$$I = \sum_{k=1}^N m_k R_k^2, \quad (13.5)$$

se numește *moment de inerție al rigidului* în raport cu axa de rotație. Conform relației (13.5) momentul de inerție al rigidului are o valoare ce depinde de masa lui și de repartiția acesteia în jurul axei de rotație. Deci nu se poate calcula momentul de inerție al unui corp fără să se indice axa de rotație. Prin substituția formulei (13.5) în (13.4), obținem

$$L_z = I\omega. \quad (13.6)$$

Momentul impulsului rigidului în mișcare de rotație în jurul axei fixe este egal cu produsul dintre momentul său de inerție în raport cu aceeași axă și viteza unghiulară. Pentru orice rigid există cel puțin trei axe de rotație, numite axe principale de inerție, față de care momentul impulsului rigidului \vec{L} este paralel cu ele. În raport cu aceste axe relația (13.6) se scrie vectorial:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (13.7)$$

13.2. Legea fundamentală a dinamicii rigidului în rotație în jurul axei fixe

Să aplicăm pentru un rigid în mișcare de rotație în jurul unei axe principale de inerție teorema variației momentului impulsului (11.17),

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e. \quad (13.8)$$

Substituind expresia (13.7) în această teoremă și luând în considerație că $I = \text{const}$, obținem

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M}^e. \quad (13.9)$$

Momentul rezultat al forțelor externe mai este numit – referitor la rigid – *moment de rotație*. Atunci, conform egalității a doua din legea (13.9), momentul de rotație față de o axă principală de inerție este egal cu produsul dintre momentul de inerție al rigidului față de aceeași axă și accelerația lui unghiulară.

Dacă axa de rotație nu este principală de inerție, vectorii \vec{L} și $\vec{\omega}$ nu sunt coliniari și mișcarea de rotație a rigidului este descrisă de relația ce se obține, proiectând (13.9) pe direcția axei de rotație, fie z :

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \varepsilon = M_z^e. \quad (13.10)$$

În formula (13.10) L_z este momentul impulsului rigidului în raport cu axa z , iar proiecția momentului de rotație \vec{M}^e pe această axă M_z^e se numește *moment de rotație în raport cu axa considerată*, față de care a fost determinat și momentul de inerție al rigidului I_z . Menționăm că valoarea M_z^e nu depinde de poziția pe axa z a punctului, față de care se trasează vectorul \vec{M}^e . Fiecare din relațiile (13.8)-(13.10) reprezintă, în condițiile indicate, *legea fundamentală a dinamicii mișcării de rotație a rigidului în jurul axei fixe*.

Comparând această lege cu legea fundamentală a dinamicii punctului material și a rigidului în mișcare de translație (6.1)-(6.2¹) se constată o analogie perfectă în sensul următor: rolul masei m , vitezei liniare \vec{v} , accelerației liniare \vec{a} , impulsului \vec{P} și forței rezultante \vec{F} din legea fundamentală a mișcării de translație este preluat în legea mișcării de rotație a rigidului respectiv de momentul de inerție I , viteza unghiulară $\vec{\omega}$, accelerația unghiulară $\vec{\epsilon}$, momentul impulsului \vec{L} și momentul de rotație \vec{M}^e . Aceeași analogie se va putea observa și în §§ 14-16.

Conform relației (13.8), un rigid se rotește în jurul axei fixe cu un moment al impulsului constant dacă momentul de rotație sau proiecția lui pe axa de rotație este egală cu zero, $\vec{M}^e = 0$, sau $M_z^e = 0$. Acest rezultat reprezintă *legea conservării momentului impulsului rigidului*:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}; \quad L_z = \text{const}. \quad (13.11)$$

Legea (13.11) se generalizează pentru un sistem de rigide. Să considerăm un sistem izolat format din câteva părți rigide, poziția reciprocă a cărora se schimbă în timpul rotației. În rezultat, variază și momentul de inerție al sistemului. Atunci, după cum urmează din legea (13.11), produsul $I\omega$ rămâne constant în timp, dar creșterea momentului de inerție duce la descreșterea vitezei unghiulare și invers.

§14. Momentul de inerție al rigidului. Teorema Steiner

Un rigid de formă arbitrară, este un mediu finit, continuu, caracterizat de densitatea ρ .

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (14.1)$$

unde dm este masa volumului elementar dV , toate punctele materiale ale căruia sunt situate la aceeași distanță r de axa de rotație. În aceste condiții expresia (13.5) devine:

$$I = \int_0^V \rho r^2 dV, \quad (14.2)$$

sau

$$I = \rho \int_0^V r^2 dV, \quad (14.2')$$

dacă rigidul este omogen ($\rho = \text{const}$). Relațiile (14.2), (14.2') permit un calcul relativ simplu al momentelor de inerție pentru corpuri de formă geometrică regulată.

Exemplu. Calculul momentului de inerție al unui disc omogen în raport cu axa ce trece prin centrul său de masă perpendicular pe planul discului (fig 2.9).

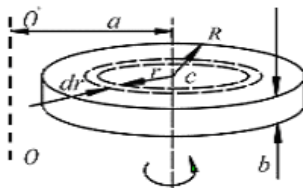


Fig. 2.9

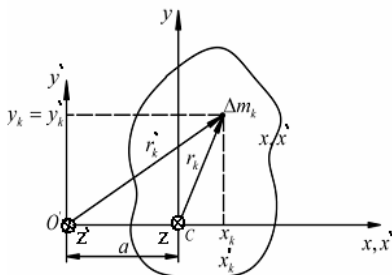


Fig 2.10

Discul se divizează imaginar în straturi inelare de grosime dr infinit de mică, concentrice cu axa de rotație, astfel că toate punctele unui strat sunt echidistante de axă. Volumul unui strat $dV = b2\pi r dr$ se introduce în (14.2'):

$$I = \rho \int_0^V r^2 dV = 2\pi \rho b \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4}.$$

Deoarece masa discului este $m = \rho \cdot V = \rho b \pi R^2$, atunci momentul de inerție devine:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (14.3)$$

În acest exemplu calculul momentului de inerție a fost simplu, deoarece rigidul s-a considerat omogen și simetric față de axa de rotație. Dacă axa de rotație nu este și axă de simetrie (de exemplu axa OO' fig 2.9) calculul integralei (14.2') este mult mai complicat. În astfel de situații determinarea momentului de inerție se simplifică dacă se aplică *teorema Steiner*:

$$I_{oo'} = I_c + m a^2, \quad (14.4)$$

unde $I_{oo'}$ este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa arbitrară OO' ; I_c este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa ce trece prin centrul de masă al rigidului paralel cu cea arbitrară; m este masa rigidului; a este distanța dintre axe.

Vom demonstra această teoremă considerând un rigid de formă arbitrară (fig.2.10), pentru care indicăm două sisteme de coordonate cu axele paralele. Sistemul xyz cu originea în centrul de masă C al rigidului, iar sistemul $x'y'z'$ cu originea în punctul O' , deplasat la distanța a de C în lungul axei x . Pe fig 2.10 axele paralele z și z' sunt perpendiculare pe planul foi. Coordonatele unui volum elementar de masă Δm_k , determinate în raport cu ambele sisteme de coordonate, sunt legate prin relațiile:

$$x'_k = a + x_k, \quad y'_k = y_k.$$

Din figura 2.10 se vede că :

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2, \quad (r'_k)^2 = (x'_k)^2 + (y'_k)^2 = (a + x_k)^2 + y_k^2. \quad (14.5)$$

Substituind egalitățile (14.5) în definiția (13.5) se calculează momentele de inerție ale rigidului în raport cu cz

$$I_C = \sum_{k=1}^N r_k^2 \Delta m_k = \sum_{k=1}^N (x_k^2 + y_k^2) \Delta m_k, \quad (14.6)$$

și cu $o'z'$

$$I = \sum_{k=1}^N (r'_k)^2 \Delta m_k = \sum_{k=1}^N [(a + x_k)^2 + y_k^2] \Delta m_k =$$

$$= \sum_{k=1}^N (x_k^2 + y_k^2) \Delta m_k + a^2 \sum_{k=1}^N \Delta m_k + 2a \sum_{k=1}^N x_k \Delta m_k . \quad (14.7)$$

Centrul de masă C este originea sistemului xyz , deci $x_C = 0$.

Așa cum $x_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N x_k \Delta m_k$, rezultă că ultimul termen din partea dreaptă a egalității (14.7) este egal cu zero. Primul termen din parte dreaptă a egalității (14.7) coincide cu I_c din (14.6), al doilea este egal cu ma^2 . Atunci (14.7) devine:

$$I = I_c + ma^2$$

și teorema Steiner este demonstrată. În tabelul 1 sunt date momentele de inerție ale unor corpuri cu simetrii evidente față de axele de rotație.

§15. Energia cinetică a rigidului în mișcarea de rotație

Considerăm un rigid ce efectuează mișcare de rotație în jurul axei fixe. Fiecare punct material de masă m_k are viteza liniară \vec{v}_k , ce diferă de la un punct material la altul. Energia cinetică a rigidului se scrie:

$$W_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} . \quad (15.1)$$

Substituind consecutiv prima relație din (13.1) și (13.5) în expresia (15.1) se obține:

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k R_k^2 = \frac{I \omega^2}{2} . \quad (15.2)$$

Expresia $W_c = \frac{I \omega^2}{2}$ este valabilă pentru calculul energiei cinetice a rigidului în rotație în jurul unei axe fixe, indiferent dacă această axă este sau nu principală.

Corpul rigid ce se rotește în jurul unei axe ce trece prin centrul său de masă, și în același timp efectuează o mișcare de translație are energia cinetică compusă din două părți

$$W_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (15.3)$$

Termenul $\frac{mv^2}{2}$ reprezintă energia cinetică de translație a centrului de masă a rigidului (în care se consideră concentrată întreaga masă m a rigidului), iar $\frac{I_c \omega^2}{2}$ – energia de rotație a rigidului, I_c fiind momentul de inerție al acestuia în raport cu axa de rotație ce trece prin centrul de masă.

§16. Lucrul forțelor externe asupra rigidului în mișcare de rotație

Se consideră un rigid în mișcare de rotație în jurul axei z .

Punctul material m_k , asupra căruia acționează forța externă \vec{F}_k parcurge în timpul dt drumul ds_k

$$ds_k = R_k d\varphi, \quad (16.1)$$

unde $d\varphi$ este unghiul de rotație a rigidului în timpul indicat, R_k – distanța de la punctul material m_k la axa de rotație.

Momentul forței \vec{F}_k față de axa z este determinat de proiecția forței pe direcția deplasării (adică pe direcția vectorului unitate $\vec{\tau}$) notată $F_{\tau k}$. Celelalte proiecții ale \vec{F}_k – una paralelă cu axa z și alta cu R_k – au momente nule față de axa z . Prin urmare,

$$M_{zk} = F_{\tau k} R_k, \quad (16.2)$$

Lucrul mecanic elementar al forței \vec{F}_k este:

$$\delta A_k = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = F_{\tau k} ds_k, \quad (|d\vec{r}_k| = ds_k, F_{\tau k} = F_k \cos \alpha).$$

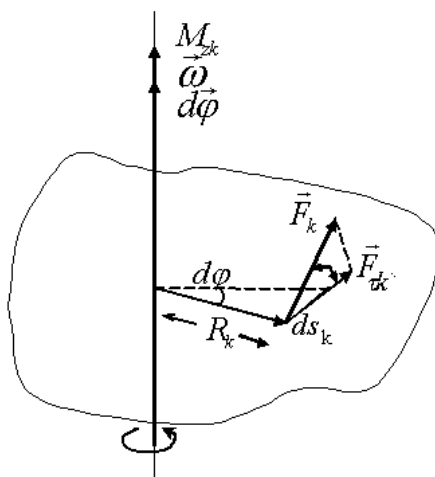


Fig.2.11

Substituind consecutiv relațiile (16.1) și (16.2) în ultima egalitate, obținem formula de calcul a *lucrului elementar*, efectuat de forța \vec{F}_k la rotația rigidului cu $d\varphi$:

$$\delta A_k = F_{\tau k} R_k d\varphi = M_{zk} d\varphi . \quad (16.3)$$

Asupra rigidului în mișcare de rotație se admite acțiunea mai multor forțe externe, care efectuează lucrul mecanic sumar elementar

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \delta A_k = d\varphi \sum_{k=1}^N M_{zk} = M_z d\varphi . \quad (16.4)$$

În egalitatea (16.4) M_z reprezintă momentul sumar de rotație în raport cu axa z al forțelor externe. *Lucrul integral* efectuat de forțele externe într-un interval finit arbitrar de timp se calculează prin integrarea egalității (16.4):

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = \int_0^t M_z \omega dt . \quad (16.5)$$

Dacă $M_z = const$, atunci

$$A_{12} = M_z \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z \Delta\varphi . \quad (16.6)$$

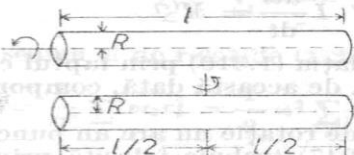
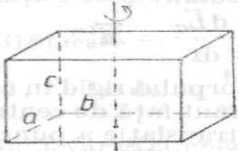
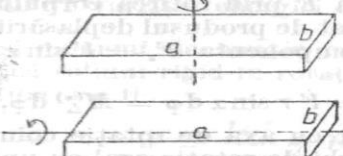
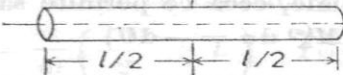
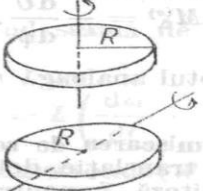


Menționăm că lucrul forțelor externe este egal cu variația energiei cinetice a rigidului

$$\delta A = dW_c$$

Substituind relațiile (15.2) și (16.4) în această egalitate, după transformările de rigoare, rezultă legea fundamentală a mișcării de rotație $M_z = I_z \varepsilon$.

După cum s-a constatat anterior, există o analogie evidentă între mărimile fizice ce caracterizează mișcările de translație și de rotație ale unui rigid. Tabelul 2 prezintă o comparație dintre mărimile fizice respective.

Tabelul 1

Nr. crt.	Corpul și axa de rotație	I
1	<p>Cilindru plin</p> 	$\frac{m R^2}{2}$ $\frac{m R^2}{4} + \frac{m l^2}{12}$
2	<p>Paralelipiped</p> 	$\frac{m (a^2 + b^2)}{12}$
3	<p>Placă dreptunghiulară</p> 	$\frac{m (a^2 + b^2)}{12}$ $\frac{m b^2}{12}$
4	<p>Tijă subțire</p> 	$\frac{m l^2}{12}$
5	<p>Disc subțire</p> 	$\frac{m R^2}{2}$ $\frac{m R^2}{4}$
6	<p>Inel cilindric</p> 	$m R^2$
7	<p>Sferă plină</p> 	$\frac{2}{5} m R^2$

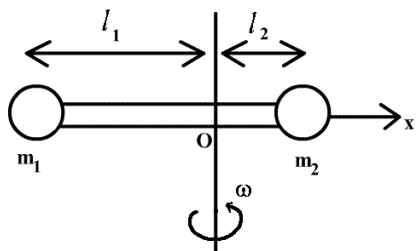
Tabelul 2

Mișcarea de translație	Mișcarea de rotație
Masa m (kg)	Momentul de inerție I ($kg \cdot m^2$)
Deplasarea $\Delta \vec{r}$ (m)	Unghiul de rotație $\vec{\varphi}$ (rad)
Viteza $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (m/s)	Viteza unghiulară $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \left(\frac{rad}{s} \right)$
Accelerația $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (m/s^2)	Accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \left(\frac{rad}{s^2} \right)$
Forța \vec{F} (N)	Momentul forței $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right)$
Impulsul $\vec{P} = m\vec{v}$ (kgm/s)	Momentul impulsului $\vec{L} = I\vec{\omega} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s} \right)$
Lucrul mecanic $dA = \vec{F}d\vec{r}$ (J)	Lucrul mecanic $dA = M_z d\varphi$ (J)
Energia cinetică $W_c = \frac{mv^2}{2}$ (J)	Energia cinetică $W_c = \frac{I\omega^2}{2}$ (J)

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1

Două sfere mici cu masele $m_1 = 100g$ și $m_2 = 200g$ sunt legate printr-o tijă cu lungimea $l = 50cm$, de masă neglijabilă. Sistemul se rotește cu viteza unghiulară $\omega = 3 rad/s$ în jurul axei perpendiculare pe tijă și care trece prin centrul de masă al sistemului. Să se calculeze impulsul, energia cinetică și momentul impulsului sistemului.



Rezolvare

În raport cu axa Ox de pe figură poziția centrului de masă al sistemului este dată de relația

$$X_C = \frac{-l_1 m_1 + l_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Scrim sistemul de ecuații, ce urmează din aceasta relație și condițiile problemei

$$\begin{cases} l_1 m_1 = l_2 m_2 \\ l_1 + l_2 = l \end{cases},$$

din care rezultă

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Impulsul sistemului, format din două sfere mici, reprezintă suma impulsurilor lor

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

În conformitate cu egalitatea (10.3) această sumă este egală cu zero. Într-adevăr, proiectată pe axa Ox egalitate se scrie

$$P = P_2 - P_1 = \omega(m_2 l_2 - m_1 l_1) = 0.$$

S-a folosit relația $v = \omega l$. Energia cinetică a sferelor, considerate

puncte materiale, este $W_C = \frac{I\omega^2}{2}$, unde I – este momentul de

inerție $I = mr^2$, iar momentul impulsului este $L = I\omega$

$$W_C = \frac{I_1 \omega^2}{2} + \frac{I_2 \omega^2}{2} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_1 m_2 l^2 \omega^2}{2(m_1 + m_2)} = 75 \cdot 10^{-3} J,$$

$$L = I\omega = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \omega = \frac{m_1 m_2 l^2 \omega}{m_1 + m_2} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{kg \cdot m^2}{s}.$$

Problema 2

Un disc cilindric de masă $m_1 = 2kg$ și diametrul $d_1 = 2m$ se rotește cu viteza unghiulară $\omega_0 = 10 \frac{rad}{s}$ în raport cu axa sa de simetrie. La un moment dat discul se cuplează printr-o curea de transmisie cu al doilea disc de masă $m_2 = 1kg$ și diametrul $d_2 = 1m$, aflat în repaus. Să se calculeze vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 ale discurilor după cuplarea lor.

Rezolvare

În condițiile problemei, neglijând masa curelei de transmisie, pentru sistemul format din ambele discuri se respectă legea conservării momentului impulsului

$$I_1\omega_0 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2.$$

unde I_1 și I_2 sunt momentele de inerție ale discurilor. Din faptul că toate punctele curelei de transmisie au aceeași viteză urmează că punctele periferice ale ambelor discuri cuplate au aceeași viteză $v_1 = v_2$ sau $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, unde $r_1 = \frac{d_1}{2}$, $r_2 = \frac{d_2}{2}$. Astfel, am obținut un sistem de ecuații, din rezolvarea căruia rezultă

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{I_1 r_2}{I_1 r_2 + I_2 r_1}, \quad \omega_2 = \frac{I_1 r_1}{I_1 r_2 + I_2 r_1}$$

Momentele de inerție ale discurilor, ce se rotesc în raport cu axele sale de simetrie sunt

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}.$$

Substituind aceste expresii, obținem

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{m_1 r_1}{m_1 r_1 + m_2 r_2} = 8 \frac{rad}{s},$$
$$\omega_2 = \omega_0 \frac{m_1 r_1^2}{r_2 (m_1 r_1 + m_2 r_2)} = 16 \frac{rad}{s}.$$

Problema 3

Un om (considerat punct material) cu masa m_1 se află pe marginea unui disc orizontal omogen, care se poate roti liber în jurul axei sale verticale de simetrie. Masa discului este m_2 , iar raza R . Omul începe să se deplaseze pe marginea discului. În procesul deplasării, care durează până când omul se rotește față de disc cu unghiul φ_1 , viteza lui variază în timp conform legii $v_1(t)$. Să se determine unghiul cu care s-a rotit discul și momentul forței în raport cu axa de rotație cu care omul a acționat asupra discului în timpul mișcării.

Rezolvare

Asupra sistemului om-disc nu acționează momente externe de rotație, momentul impulsului acestui sistem este constant în timp

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \overrightarrow{const}.$$

În starea inițială omul și discul sunt în repaus, prin urmare $\overrightarrow{const} = 0$. Luând în considerație faptul că discul se rotește în sens contrar mișcării omului obținem că momentul impulsului omului este egal cu momentul impulsului discului $L_1 = L_2$, unde $L_1 = I_1 \omega_1 = m_1 R^2 (\omega_1 - \omega_2)$, (ω_1 - viteza unghiulară a omului față de disc, ω_2 - viteza unghiulară a discului față de sol, $(\omega_1 - \omega_2)$ - viteza unghiulară a omului față de sol),

$$L_2 = I_2 \omega_2 = \frac{m_2 R^2}{2} \omega_2$$

Substituim $\omega_1 = \frac{\varphi_1}{t}$, $\omega_2 = \frac{\varphi_2}{t}$ unde φ_2 este unghiul cu care s-a rotit discul. Obținem egalitatea

$$m_1 R^2 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{t} \right) = \frac{m_2 R^2}{2} \frac{\varphi_2}{t}$$

din care determinăm φ_2

$$\varphi_2 = \frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} \varphi_1$$

Conform legii fundamentale a dinamicii mișcării de rotație a rigidului, momentul de rotație cu care omul acționează asupra discului este

$$M = I_2 \varepsilon = \frac{m_2 R^2}{2} \varepsilon.$$

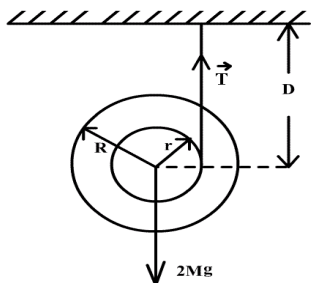
Vom determina accelerația unghiulară a discului ε , calculând derivata a doua de la unghiul de rotație.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} \varphi \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} \omega_1 \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} \frac{v_1}{R} \right) = \frac{2m_1}{(m_2 + 2m_1)R} \frac{dv_1}{dt}, \\ M &= \frac{m_2 R^2}{2} \cdot \frac{2m_1}{(m_2 + 2m_1)R} \cdot \frac{dv_1}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_2 + 2m_1} \cdot \frac{dv_1}{dt}. \end{aligned}$$

Problema 4

Un mosor este format din două discuri omogene, fiecare având masa M și raza R , și dintr-un cilindru cu raza r și masa neglijabilă. Un fir înfășurat în jurul cilindrului este atârnat de plafon. Mosorul este lăsat liber atunci, când se află la distanța D de plafon. Să se calculeze accelerația de coborâre a centrului de masă al mosorului.

Rezolvare



Asupra mosorului, deci și asupra centrului său de masă, acționează forțele de greutate și de tensiune din fir, orientată verticală în jos, respectiv în sus. Când componenta orizontală a acestor forțe este nulă, adică unghiul format de verticală cu firul este nul, mosorul nu pendulează.

Centrul său de masă se deplasează rectiliniu uniform accelerat, iar mosorul efectuează o mișcare compusă din translație și rotație.

Scriem legile fundamentale pentru mișcarea de translație

$$2Ma = 2Mg - T$$

și pentru mișcarea de rotație

$$I\varepsilon = Tr,$$

unde $I = 2\frac{MR^2}{2} = MR^2$ este momentul de inerție al mosorului în

raport cu axa ce trece prin centrul său de masă, $\varepsilon = \frac{a}{r}$ este accelerația unghiulară, iar Tr este momentul de rotație al forței de tensiune ($\sin \angle(\vec{T}, \vec{r}) = 1$). Eliminând pe T din ecuațiile de mișcare rezultă:

$$a = \frac{2r^2 g}{R^2 + 2r^2}.$$

Problema 5

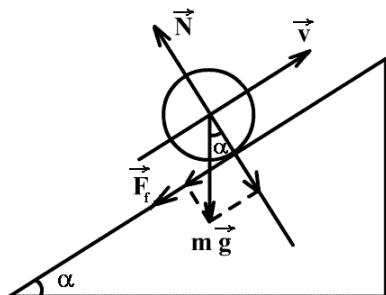
O sferă se aruncă prin rostogolire, cu viteza inițială $V_0 = 10 \text{ m/s}$, pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală. Coeficientul de frecare de rostogolire fiind $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$, să se calculeze accelerațiile la urcare și coborâre.

Rezolvare

Sfera efectuează o mișcare compusă din translație și rotație, energia ei mecanică inițială este

$$\frac{mV_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad \text{unde} \quad I = \frac{2}{5}mR^2$$

este momentul de inerție al sferei în raport cu axa ce trece prin centrul ei de masă. La urcarea cu frecare pe plan o parte din această energie se transformă în energia potențială $mg l \sin \alpha$, unde l este



distanța în lungul planului, parcursă de sferă la urcare. Cealaltă parte din energia cinetică inițială se transformă, în rezultatul lucrului forței de frecare, în energia internă $F_f \cdot l = \mu Nl = \mu mgl \cos \alpha$. Legea conservării energiei se scrie:

$$\frac{mV_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = mgl \sin \alpha + \mu mgl \cos \alpha.$$

Se substituie expresia pentru I , viteza unghiulară $\omega_0 = \frac{V_0}{R}$,

distanța $l = \frac{V_0^2}{2a_u}$, unde a_u este accelerația la mișcare. Obținem:

$$a_u = 5g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) / 7 = 4.64 \text{ m/s}^2$$

La coborârea pe plan energia potențială se transformă parțial în energie cinetică de rotație și de translație, cealaltă parte - egală numeric cu lucrul forței de frecare - în energie internă,

$$mgl \sin \alpha = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \mu mgl \cos \alpha$$

Substituind $l = \frac{V^2}{2a_c}$, unde a_c este accelerația de coborâre,

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \text{ și } \omega = \frac{V}{R} \text{ se obține } a_c.$$

$$a_c = \frac{5(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{7} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

Observăm, că $a_U = a_C$ în absența frecării.

Problema 6

Un cilindru cu masa $M_1 = 16 \text{ kg}$ și rază $R_1 = 0,5 \text{ m}$ se poate roti în jurul axei sale verticale de simetrie. Pe cilindru este înfășurat un fir, fixat cu un capăt pe cilindru. De celălalt capăt se atârnă un corp de masă $m = 1 \text{ kg}$ prin intermediul unui scripete de masă $M_2 = 2 \text{ kg}$ și rază $R_2 = 0,4 \text{ m}$. Să se determine:

a) accelerația liniară a corpului de masă m și tensiunile din fir;

b) *accelearațiile unghiulare ale cilindrului și scripetului.*

Rezolvare

a) Accelerația liniară a corpului de masă m se poate determina rezolvând sistemul de ecuații, ce reprezintă legile de mișcare ale corpurilor din sistem:

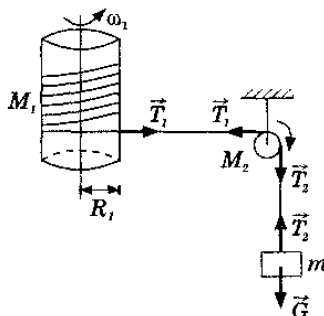
legea mișcării de rotație a corpului M_1 , asupra căruia acționează momentul forței T_1

$$T_1 R_1 = I_1 \varepsilon_1 ;$$

legea mișcării de rotație a scripetelui, asupra căruia acționează momentele forțelor T_1 și T_2

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = I_2 \varepsilon_2 ;$$

legea mișcării de translație a corpului m



$$mg - T_2 = ma .$$

Se substituie momentele de inerție $I_1 = \frac{M_1 R_1^2}{2}$, $I_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2}$ și relațiile dintre accelerațiile unghiulare și cele liniare $\varepsilon_1 = \frac{a}{R_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{a}{R_2}$. În rezultat după transformări simple sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{M_1 a}{2}, \\ T_2 - T_1 = \frac{M_2 a}{2}, \\ mg - T_2 = ma. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, obținem

$$a) a = \frac{2mg}{2m + M_1 + M_2} = 1m/s^2, T_1 = \frac{M_1 mg}{2m + M_1 + M_2} = 8N,$$

$$T_2 = mg \frac{M_1 + M_2}{2m + M_1 + M_2} = 9N.$$

$$b) \varepsilon_1 = \frac{a}{R_1} = 2 \frac{rad}{s^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{R_2} = 2,5 \frac{rad}{s^2}.$$

Întrebări de verificare

1. Să se definească mărimile fizice: a) momentul impulsului rigidului în raport cu un punct; b) momentul impulsului rigidului în raport cu o axă; c) momentul de inerție al rigidului. Ce relații leagă aceste mărimi fizice calculate în raport cu: a) o axă de rotație fixă, arbitrară; b) o axă principală de inerție?
2. Să se formuleze legea fundamentală a dinamicii rigidului în rotație în jurul unei axe fixe.
3. Fie că momentul de inerție al unui sistem de rigide, în rotație în jurul unei axe fixe, crește în timp (variază poziția rigidelor față de axa de rotație). Ce se întâmplă cu viteza unghiulară a sistemului?
4. Fie un inel ce se rostogolește, fără alunecare, din vârful unui plan înclinat. Care este expresia de calcul a energiei cinetice a rigidului?
5. Să se compare și să se comenteze analogia dintre mărimile fizice, relațiile și legile, ce descriu mișcările de translație și de rotație ale unui rigid.

III. Bazele teoriei relativității restrânse

§ 17. Principiul relativității în mecanica și în electromagnetismul clasic

17.1. Principiul relativității în mecanica clasică

Principiul relativității, formulat de către Galilei, se enunță: mișcarea rectilinie și uniformă a sistemelor inerțiale de referință nu influențează desfășurarea în raport cu aceste sisteme a proceselor mecanice. Acest principiu postulează echivalența tuturor sistemelor inerțiale de referință. O urmare directă a lui constă în aceea că starea de mișcare rectilinie și uniformă a unui sistem de referință nu poate fi detectată prin nici un experiment mecanic. O altă formulare a principiului relativității—formularea newtoniană—se bazează pe transformările Galilei.

Considerăm două sisteme inerțiale de referință K și K' , originile cărora coincid la momentul $t_0 = 0$. Sistemul K este imobil, iar K' se deplasează față de el cu viteză $\vec{V} = c\vec{const}$ (fig. 3.1). Se notează cu t, t' timpul măsurat în K , respectiv K'

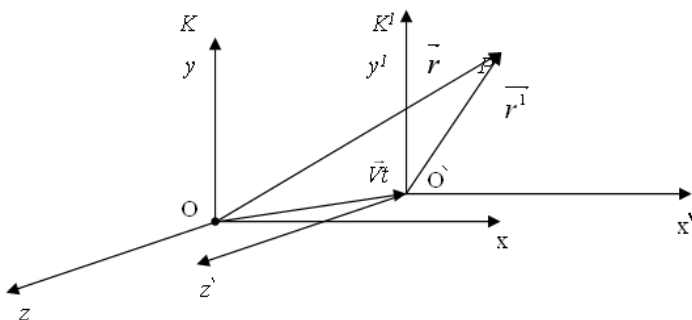


Fig. 3.1.

și se consideră, fără deducere, că distanța dintre două puncte măsurată din diferite sisteme inerțiale de referință este aceeași, adică absolută. Scriem vectorul de poziție al punctului P în raport cu K și respectiv cu K'

$$\begin{array}{cc} K & K' \\ \vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' & \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t' \quad (\vec{r} = \vec{V}t' + \vec{r}') \end{array} \quad (17.1)$$

Prin urmare,

$$t = t' , \quad (17.2)$$

adică și timpul se postulează că este absolut, independent de starea de mișcare a sistemelor inerțiale de referință. Evident, din (17.2) rezultă simultaneitatea absolută a evenimentelor în raport cu orice sistem inerțial de referință. Relațiile (17.1)–(17.2) reprezintă *transformările Galilei*, care pot fi scrise și în formă scalară:

$$\begin{array}{cc} K & K' \\ x = x' + V_x t & x' = x - V_x t' \\ y = y' + V_y t & y' = y - V_y t' \\ z = z' + V_z t & z' = z - V_z t' \\ t = t' & t' = t \end{array} \quad (17.3)$$

Prin derivarea primei egalități din (17.1) se obține *legea compunerii vitezelor în mecanica clasică*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} , \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} , \quad (17.4)$$

o urmare directă a căreia este caracterul absolut al vitezei relative a oricăror două puncte. Astfel, poziția reciprocă și viteza relativă a două puncte materiale arbitrare sunt invariabile față de sistemul inerțial de referință, adică față de transformările Galilei (17.1)–(17.3). Prin urmare, sunt invariante față de aceste transformări și forțele de interacțiune dintre punctele materiale, care depind numai de poziția reciprocă și viteza relativă a acestor puncte. Prin derivarea (17.4) se obține că accelerația este aceeași în diferite sisteme inerțiale de referință: $\vec{a} = \vec{a}'$. Generalizând rezultatele expuse se ajunge la concluzia că legile mecanicii sunt invariante la trecerea coordonatelor și timpului de la un sistem inerțial la altul:

$$\begin{array}{cc} K & K' \\ \vec{F} = m\vec{a} , \quad \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} & \vec{F}' = m'\vec{a}' , \quad \vec{F}'_{ki} = -\vec{F}'_{ik} \end{array} \quad (17.5)$$

unde $m = m'$ este masa punctului material supus acțiunii forței \vec{F} , respectiv \vec{F}' ($\vec{F} = \vec{F}'$). Astfel, *principiul relativității lui Galilei, formulat de către Newton*, se enunță astfel: legile mecanicii sunt invariante în raport cu grupul de transformări Galilei (17.1)-(17.2).

17.2. Principiul relativității în electrodinamica clasică

Principiul relativității din mecanica clasică a fost repus în discuție în jumătatea a doua a sec. XIX în legătură cu extinderea lui asupra fenomenelor electromagnetice. În acea perioadă se considera că undele electromagnetice, deci și lumina, se propagă printr-un mediu elastic, numit eter, care umple vidul interplanetar și intramolecular. Sistemul de referință, legat cu eterul universal și imobil, se considera sistem unic, absolut, în raport cu care ar fi posibilă determinarea vitezei absolute a Pământului în mișcare în jurul Soarelui. În vestitul său experiment, efectuat cu acest scop, Michelson a considerat un sistem de referință identificat cu eterul imobil și un altul – cu Pământul, în particular cu însuși aparatul de măsură utilizat, în mișcare orbitală față de eter cu viteza \vec{V} . Neobținerea rezultatului așteptat, adică infirmarea ipotezei existenței unui eter imobil (a unui sistem de referință imobil, absolut) și constatarea că viteza luminii este invariabilă în raport cu sistemele de referință indicate, deci nu respectă legea compunerii vitezelor din mecanica clasică, au făcut ca rezultatul experimentului lui Michelson să fie considerat “negativ”. Ulterior, experimentul a fost repetat în diverse condiții, cu aparatură perfecționată, deci justetea lui nu putea fi pusă la îndoială, dar totdeauna rezultatele au fost “negative”.

A devenit clar că se comite o greșală în interpretarea teoretică a rezultatelor: principiul relativității lui Galilei și, în particular, legea compunerii vitezelor (17.4), nu sunt aplicabile procesului de propagare a undelor electromagnetice. Totodată, s-a constatat că ecuația unei electromagnetice nu este invariantă față de transformările Galilei. Deci, la fel se comportă și sistemul de ecuații al lui Maxwell – baza electrodinamicii clasice – din care rezultă ecuația unei electromagnetice.

Contradicțiile apărute între rezultatele experimentale, teoria electrodinamică și principiul relativității lui Galilei au impus înlocuirea transformărilor Galilei prin altele, în raport cu care să rămână invariante atât ecuațiile ce descriu fenomenele mecanice cât și cele care descriu fenomenele electromagnetice. Aceste noi transformări au fost stabilite de către Lorentz. La momentul elaborării, transformările Lorentz erau lipsite de o semnificație fizică concretă, fiind considerate niște relații artificiale, introduse cu scopul de a elimina contradicțiile indicate.

§18. Postulatele teoriei relativității restrânse.

Relații de transformare Lorentz

18.1. Principiile teoriei relativității restrânse

Deficiențele apărute odată cu aplicarea principiului relativității mecanicii clasice la studierea fenomenelor electromagnetice au fost eliminate de către Einstein care, în 1905, renunțând la noțiunile de eter universal, spațiu și timp absolut, a pus bazele unei mecanici noi, numită mecanică relativistă. Teoria elaborată pentru sisteme inerțiale de referință, numită teoria relativității restrânse, se bazează pe două principii (postulate).

Postulatul I constituie o generalizare a principiului relativității lui Galilei asupra tuturor fenomenelor fizice: în orice sisteme inerțiale de referință, în unele și aceleași condiții, fenomenele fizice decurg la fel. Deci toate legile fizice sunt invariante în raport cu sistemele inerțiale de referință. Toate sistemele inerțiale de referință fiind echivalente, nici un experiment fizic nu poate pune în evidență starea lor de repaus sau de mișcare uniformă rectilinie.

Postulatul II rezultă direct din rezultatele experimentului lui Michelson, care a scos în evidență faptul că viteza luminii în vid nu depinde de mișcarea sursei de lumină, ea are aceeași valoare $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ față de toate sistemele inerțiale de referință, este o constantă fizică fundamentală. Astfel, teoria relativității restrânse

postulează invarianța vitezei maxime de propagare a interacțiunilor, egală cu c , în raport cu orice sistem inerțial.

Aceste două postulate impun negarea concepțiilor clasice de timp și spațiu absolut, fiind în contradicție cu ele. La contradicția menționată se poate ajunge prin mai multe exemple. Să analizăm unul din ele.

Fie că la momentul $t_0 = 0$ originile O și O' a două sisteme inerțiale K și respectiv K' coincid și în ele se produce un impuls instantaneu de lumină (fig.3.2). Sistemul K' se deplasează în lungul axei Ox cu viteza $\vec{V} = \text{const}$. Propagându-se cu viteza c , lumina atinge la momentul t , față de sistemul K , suprafața unei sfere cu centrul în O și raza ct . În raport cu sistemul K' impulsul s-a produs în momentul $t'_0 = 0$ și în momentul $t' = t$ lumina atinge suprafața unei sfere de aceeași rază ct , însă cu centrul în O' , situat în acest moment la distanța Vt de la O . Astfel, dacă se menține caracterul absolut al timpului, se ajunge la absurd: impulsul de lumină trebuie să ajungă simultan în puncte, ce aparțin suprafețelor a două sfere diferite.

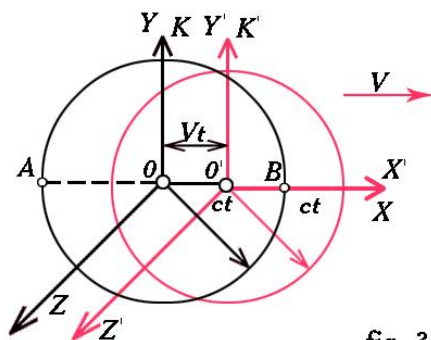


fig. 3.2

18.2. Relațiile de transformare Lorentz

Relațiile de transformare Lorentz, elaborate pentru a menține invarianța față de sistemele inerțiale a ecuațiilor electromagnetice, și-au găsit o interpretare fizică doar în cadrul teoriei relativității restrânse, fiind extinse asupra tuturor fenomenelor fizice.

Postulatele, puse la baza teoriei relativității restrânse, permit obținerea relațiilor de transformare ale lui Lorentz.

Considerăm două sisteme inerțiale de referință K și K' . Sistemul K' se deplasează față de K cu viteza $\vec{V} = \vec{c} \text{const}$ orientată în sensul pozitiv al axei Ox . Între coordonatele x' și x ale unui punct oarecare există o relație de dependență care trebuie:

1.să fie liniară , deoarece unei poziții a punctului considerat față de K îi corespunde o singură poziție față de K' ;

2.să se reducă la relația de transformare Galilei în cazul $V \ll c$.

Această relație se scrie

$$x' = \alpha(x - Vt). \quad (18.1)$$

Într-adevăr, relația (18.1) este liniară și trece în formula lui Galilei pentru $\alpha = 1$. Pe baza postulatului I dependența lui x de x' se poate obține doar schimbând semnul vitezei V :

$$x = \alpha(x' + Vt'). \quad (18.2.)$$

În situația considerată $y' = y$, $z' = z$. Dacă se substituie x' din relația (18.1.) în (18.2), rezultă :

$$x = \alpha[\alpha(x - Vt) + Vt'], \quad x = \alpha^2 x - \alpha^2 Vt + \alpha Vt',$$

$$t' = \alpha t + \frac{x}{\alpha V} (1 - \alpha^2). \quad (18.3)$$

Dacă se substituie x din relația (18.2) în (18.1), atunci se obține:

$$t = \alpha t' + \frac{x'}{\alpha V} (\alpha^2 - 1). \quad (18.4)$$

În concluzie: $t \neq t'$. Ecuațiile (18.1)–(18.4), ce satisfac postulatul I, conțin coeficientul necunoscut α , care poate fi determinat dacă se recurge la postulatul II. Presupunem că la momentul $t_0 = t'_0 = 0$ din originea comună a sistemelor K și K' începe să se propage în lungul axei Ox un semnal de lumină. Conform postulatului II viteza semnalului față de ambele sisteme este aceeași, anume c . Prin urmare:

$$x' = ct', \quad (18.5)$$

$$x = ct. \quad (18.6)$$

În egalitatea (18.5) se substituie relațiile (18.1) și (18.3) și din expresia obținută se determină x ,

$$\alpha(x - Vt) = c\alpha t + \frac{xc}{\alpha V}(1 - \alpha^2),$$

$$x = \frac{(c + V)t}{1 + \frac{c}{V} - \frac{c}{\alpha^2 V}} = ct \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 + \frac{c}{V} - \frac{c}{\alpha^2 V}}.$$

În conformitate cu relația (18.6) avem $x = ct$, prin urmare,

$$\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 + \frac{c}{V} - \frac{c}{\alpha^2 V}} = 1, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (18.7)$$

Substituind această expresie în formulele (18.1), (18.3) și în (18.2), (18.4) se ajunge la *relațiile de transformare Lorentz din K în K' și, respectiv, din K' în K* :

$K \rightarrow K'$ $x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$ $y' = y,$ $z' = z,$ $t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$	$K' \rightarrow K$ $x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$ $y = y',$ $z = z',$ $t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$
--	--

(18.8)

La limita nerelativistă $V/c \rightarrow 0$ transformările Lorentz trec în transformările Galilei, respectându-se principiul de corespondență: relațiile care exprimă noul enunț al legilor fizice conțin relațiile anterioare drept cazuri particulare.

Transformările Lorentz demonstrează că coordonatele spațiale și timpul de producere a unui eveniment sunt legate reciproc. La trecerea de la un sistem inerțial de referință la altul, de asemenea inerțial și în mișcare față de primul, se modifică atât coordonatele spațiale ale evenimentului considerat, cât și momentul de timp ce îi corespunde .

Matematicianul H. Minkowsky a introdus noțiunea de *spațiu cvadridimensional* în care, pe lângă coordonatele spațiale $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ există și a patra coordonată $x_4 = ict$ ($i = \sqrt{-1}$), numită coordonată temporală. În spațiul cvadridimensional *intervalul dintre două evenimente*, adică "distanța" s dintre două puncte ale acestui spațiu se scrie

$$\begin{aligned} s^2 &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 = \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (18.9)$$

și este invariantă față de transformările Lorentz, adică $s^2 = (s')^2$,

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 &= \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Invarianța se verifică ușor prin substituirea transformărilor (18.8) în egalitatea (18.10). Pentru comparație, amintim că distanța dintre două puncte în spațiul tridimensional se scrie

$$d^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (18.11)$$

și este invariantă față de transformările Galilei .

Introducerea spațiului cvadridimensional evidențiază faptul că spațiul și timpul nu pot fi izolate. Prin izolarea lor se ajunge la spațiul absolut și timpul absolut –noțiuni valabile numai pentru viteze $V \ll c$.

18.3. Consecințe cinematice ale transformărilor Lorentz

Teoria relativității restrânse a produs schimbări conceptuale în cinematică, legate de următoarele două aspecte ce se desprind din transformările Lorentz: coordonatele spațio-temporale ale unui eveniment depind de sistemul inerțial de referință la care sunt

raportate, adică sunt relative; transformările Lorentz trec în transformările Galilei dacă $V \ll c$.

Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz se studiază în cursul liceal. De aceea, în cele ce urmează, le vom analiza succint, considerând două sisteme inerțiale K și K' . K' este în mișcare față de K cu viteza V , orientată în lungul axei Ox .

a) Relativitatea simultaneității și a colocalității a două evenimente. Succesiunea evenimentelor.

Considerăm două evenimente cu coordonatele spațio-temporale (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) în raport cu sistemul K și (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) , (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) în raport cu K' . Determinăm diferențele coordonatelor acestor două evenimente

în raport cu K :

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1,$$

$$\Delta z = z_2 - z_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

în raport cu K' :

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1, \quad \Delta y' = y'_2 - y'_1$$

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1, \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Substituind în aceste diferențe transformările respective ale lui Lorentz (18.8) se obțin expresiile:

$$K' \rightarrow K$$

$$K \rightarrow K'$$

$$1. \Delta x = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$2. \Delta y = \Delta y', \quad (18.13)$$

$$3. \Delta z = \Delta z',$$

$$4. \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\Delta y' = \Delta y, \quad (18.13')$$

$$\Delta z' = \Delta z,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Fie în K evenimentele se produc în același punct, adică sunt colocale, $\Delta x = 0$, dar nu sunt simultane, $\Delta t \neq 0$. Atunci din prima relație (18.13') urmează $\Delta x' \neq 0$, adică evenimentele nu sunt colocale în alte sisteme inerțiale. *Colocalitatea* nu este invariantă

față de transformările Lorentz. Dacă în K cele două evenimente sunt simultane $\Delta t = 0$, dar nu sunt colocale $\Delta x \neq 0$, conform relației a patra din (18.13') avem $\Delta t' \neq 0$. Prin urmare, în teoria relativității restrânse *simultaneitatea* este de asemenea relativă, depinzând de sistemul inerțial de referință.

În cazul în care cele două evenimente sunt colocale și simultane în K, $\Delta x = 0$, $\Delta t = 0$, din egalitățile (18.13') urmează $\Delta x' = 0$, $\Delta t' = 0$, adică evenimentele sunt colocale și simultane și față de K'. Acesta este cazul simultaneității absolute.

Modificând egalitatea a patra din (18.13'), obținem :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{V}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{V}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (18.14)$$

unde $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ reprezintă viteza de propagare a unui semnal (viteza de producere a unui proces), care pornește din x_1 în momentul t_1 (începutul procesului) și ajunge în x_2 în momentul t_2 (sfârșitul procesului). Vitezele din relația (18.14) respectă inegalitățile: $v < c$, $V \leq c$, $1 - \frac{V}{c^2} v \geq 0$. Prin urmare, succesiunea în timp a evenimentelor nu se modifică: $t_2 > t_1$, $t'_2 > t'_1$, evenimentul efect se produce mai târziu decât evenimentul cauză. *Succesiunea evenimentelor cauză-efect* are un caracter absolut.

b) Contrakția lungimilor.

Considerăm aceleași sisteme inerțiale K și K'. O bară în repaus față de K' este plasată în lungul axei $o'x'$. Față de acest sistem lungimea barei, numită lungime proprie, este

$$l' = l_0 = x'_2 - x'_1 = \Delta x'$$

și măsurătorile coordonatelor capetelor barei pot fi făcute în momente diferite de timp, $\Delta t' \neq 0$. Față de K bara se mișcă cu viteza V și are lungimea

$$l = x_2 - x_1 = \Delta x,$$

coordonatele x_1 și x_2 fiind, în mod obligatoriu, măsurate în același moment, $\Delta t = 0$. Atunci prima egalitate din (18.13') devine:

$$\Delta x' = l_0 = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \quad (18.15)$$

Evident, că

$$l < l_0 . \quad (18.16)$$

Am obținut că dimensiunea unui corp, în direcția mișcării sale față de un sistem inerțial arbitrar, este mai mică decât dimensiunea sa proprie.

Dacă bara ar fi în repaus față de K, în mod analog s-ar obține

$$l' < l = l_0 . \quad (18.17)$$

Astfel, în ambele cazuri bara se contractă în raport cu sistemul de referință față de care se mișcă. Din formula (18.15) rezultă că corpurile nu pot avea viteze $V \geq c$, deoarece dimensiunea liniară a corpului ar deveni nulă pentru $V = c$ și imaginară pentru $V > c$.

c) Dilatarea intervalor de timp.

Considerăm un eveniment care decurge într-un punct x' al sistemului K'. Față de K' coordonata spațială a evenimentului este fixă, adică $\Delta x' = 0$ și evenimentul durează un timp, numit timp propriu,

$$\Delta t' = t_0 = t'_2 - t'_1 . \quad (18.18)$$

Față de K evenimentul începe în punctul x_1 la momentul t_1 și se termină în x_2 la momentul t_2 , adică are durată

$$\Delta t = t_2 - t_1 .$$

Relația a patra din (18.13) în care se ia în considerație că $\Delta x' = 0$, devine:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

Astfel, am obținut că

$$\Delta t > t_0. \quad (18.19)$$

Dacă evenimentul are loc într-un punct fix față de K ($\Delta x = 0$) și durata lui în acest sistem este $\Delta t = t_0$, atunci pentru durata lui față de K', din relația a patra (18.13') se obține:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t' > \Delta t = t_0. \quad (18.20)$$

Din relațiile (18.18)–(18.20) rezultă că observatorul, față de care evenimentul are coordonată spațială în mișcare rectilinie și uniformă, determină pentru durata acestuia un interval de timp mai mare (pentru el timpul se dilată), decât observatorul, în raport cu care evenimentul decurge într-un punct în repaus și care măsoară timpul propriu în care decurge evenimentul. Altfel spus, în sistemul de referință propriu timpul se scurge mai repede decât în orice alt sistem inerțial față de care sistemul propriu se deplasează și în care toate procesele fizice sau biologice decurg mai lent decât în sistemul propriu.

Fenomenul dilatării relativiste a timpului a fost verificat experimental prin înregistrarea la suprafața Pământului a particulelor elementare, numite mezonii μ și mezonii π . Aceste particule apar în straturile superioare ale atmosferei Pământului ($\approx 10 \div 20$ km) sub acțiunea radiației cosmice, au timpul propriu de viață $t_0 \approx 10^{-9}$ s și viteza $V = 2,99 \cdot 10^8$ m/s. Dacă n-ar exista efectul relativist de dilatare a intervalului de timp, atunci față de observatorul de pe Pământ particulele ar reuși să străbată distanța $t_0 V \approx 700$ m. În realitate durata vieții particulelor față de observatorul terestru este:

$$\Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \gg t_0,$$

astfel că ele reușesc să străbată distanța până la Pământ .

d) Compunerea relativistă a vitezelor.

Fie un punct material în mișcare față de K și K' , având proiecțiile vitezei v_x, v_y, v_z și respectiv v'_x, v'_y, v'_z , definite astfel:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt};$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Vom obține relațiile dintre aceste proiecții, substituind în definițiile acestora transformările Lorentz în formă diferențială:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & dx' &= \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ dy &= dy', & dy' &= dy, \\ dz &= dz', & dz' &= dz, \\ dt &= \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & dt' &= \frac{dt - \frac{V}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (18.21)$$

Obținem proiecțiile vitezei în raport cu K exprimate prin proiecțiile respective în raport cu K' și invers,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_y &= \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_z &= \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = v'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \end{aligned} \quad (18.22)$$

$$\begin{aligned}
 v'_x &= \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2} dx} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\
 v'_y &= \frac{dy \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt - \frac{V}{c^2} dx} = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} , \\
 v'_z &= \frac{dz \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt - \frac{V}{c^2} dx} = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} .
 \end{aligned} \tag{18.23}$$

Fie punctul material se mișcă în lungul axei ox , atunci $v_x = v$, $v'_x = v'$, $v_y = v_z = v'_y = v'_z = 0$. Din formulele (18.22) urmează:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'} . \tag{18.24.}$$

Grupurile de relații (18.22), (18.23) și (18.24) reprezintă *legile de compunere ale vitezelor în mecanica relativistă*. Pentru viteze mici, $v \ll c$, din (18.24) se obține $v = v' + V$, deci legea compunerii vitezelor în mecanica clasică. Dacă un semnal de lumină ce se propagă cu $v' = c$ față de axa $O'x'$ a sistemului K' viteza sa față de K este:

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2} c} = c .$$

Semnalul de lumină are aceeași viteză și față de K , confirmându-se principiul doi al teoriei relativității restrânse. Dacă și K' are viteza $V = c$ se obține:

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2} c} = c .$$

Acest rezultat evidențiază faptul că viteza luminii în vid este o viteză maximă, ce nu poate fi depășită.

§19. Noțiuni de dinamică a teoriei relativității restrânse

Dinamica teoriei relativității restrânse prezintă deosebiri esențiale față de dinamica clasică, legate de modificarea atât a noțiunilor cinematice fundamentale, (a se vedea §18), cât și a noțiunilor dinamice de masă, impuls, energie, forță. Desigur, legile universale de conservare a impulsului și energiei—consecințe ale omogenității spațiului și, respectiv, a timpului—rămân valabile, la fel ca și principiul inerției, utilizat la definirea sistemului inerțial. Dar legea fundamentală a dinamicii clasice,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (19.1)$$

în care m și \vec{F} se consideră aceleași în toate sistemele inerțiale, nu este invariantă față de transformările Lorentz. Se impune o reformulare a ei prin modificarea noțiunii clasice de masă a corpului, modificare dictată și de rezultatele experimentale: încă la finele sec. XIX s-a observat că masa electronilor accelerați depinde de viteza lor.

19.1 Variația relativistă a masei

Pentru determinarea legii de variație a masei cu viteza este necesar să se definească masa corpului în raport cu sistemul inerțial, față de care corpul considerat este în repaus. Această mărime, numită masă proprie sau masă de repaus, se definește ca o mărime scalară, invariabilă față de sistemul inerțial de referință considerat.

Dependența dintre masa proprie m_0 a corpului și masa sa m în raport cu un sistem, față de care corpul are viteza V , se deduce pe baza legii de conservare a impulsului și a formulei relativiste de compunere a vitezelor (așa-numitul raționament Talman).

Vom folosi două sisteme inerțiale de referință K și K' . Sistemul K' este în mișcare față de K cu viteza V , orientată în sensul pozitiv al axei $0x$. Considerăm două particule, identice atunci când se află în stare de repaus, cu masele proprii m_0 , care se ciocnesc neelastic. Față de K' , înainte de ciocnire, particulele se deplasează una spre alta în lungul axei $0'x'$ cu viteze egale în modul cu V . După ciocnire, în conformitate cu legea conservării impulsului, particulele rămân în repaus în raport cu K' . Înainte de ciocnire particula ce se deplasează în sensul pozitiv al axei $0x$, are masa m_1 și viteza v_1 față de K , calculată conform formulei relativiste de compunere a vitezelor (18.24),

$$v_1 = \frac{V + V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}, \quad (19.2)$$

iar cealaltă particulă are față de K viteza v_2 , calculată conform aceleași formule

$$v_2 = \frac{V - V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = 0.$$

Prin urmare, masa particulei a doua față de K este $m_2 = m_0$. În raport cu K legea conservării impulsului se scrie:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_0) V. \quad (19.3)$$

Se substituie relația (19.2) în egalitatea (19.3). Rezultă

$$m_1 \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = (m_1 + m_0) V, \quad m_1 = m_0 \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Prin substituirea relației (19.2) în expresia $\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)$ se ajunge ușor

la identitatea:
$$1 - \frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \frac{4V^2}{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^2} = \left(\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1 + \frac{V^2}{c^2}}\right)^2.$$

Prin urmare:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

În general, dacă un corp cu masa proprie m_0 are viteza v față de un sistem inerțial, atunci masa lui față de acest sistem este :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.4)$$

Din această formulă, numită *relație de variație relativistă a masei cu viteza*, rezultă că masa, ca măsură a inerției corpului, este cu atât mai mare, cu cât viteza corpului este mai mare. Pentru viteze mici, $v \ll c$, se obține, în conformitate cu mecanica clasică, $m = m_0$. Pentru viteze mari masa particulei crește rapid odată cu viteza, tinzând spre infinit, adică inerția corpului tinde spre infinit. Aceasta înseamnă că nici un corp nu poate avea o viteză mai mare ca viteza luminii în vid și nici măcar nu o poate atinge, deoarece ar trebui o forță infinit de mare ca să învingă inerția corpului. Totodată, din (19.4) urmează că nu are sens considerarea masei ca o măsură a cantității de materie conținută în corp, care ar varia la schimbarea sistemului de referință. Justețea relației (19.4) a fost confirmată experimental. De exemplu, a fost măsurată experimental variația sarcinii specifice a electronilor accelerați odată cu creșterea vitezei lor. S-a constatat o foarte bună concordanță între expresia (19.4) și rezultatele experimentale.

19.2. Impulsul relativist. Legea fundamentală a dinamicii relativiste

Prin substituirea formulei (19.4) în definiția impulsului punctului material se obține expresia pentru impulsul unui punct material în mecanica relativistă, numit *impuls relativist*:

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19.5)$$

Conform relației (19.5) impulsul relativist crește odată cu viteza nu numai datorită factorului v , la viteze apropiate de viteza luminii în vid creșterea vitezei se datorează în special creșterii masei. Atât date experimentale, cât și legea universală a conservării impulsului indică că impulsul relativist al unui sistem izolat de puncte materiale se conservă în timp:

$$\sum_{k=1}^N \frac{m_k \vec{v}_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const} \quad (19.6)$$

Variația în unitatea de timp a impulsului relativist al unui sistem neizolat este egală cu rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului. Legea fundamentală a mecanicii relativiste, invariantă față de transformările Lorentz, scrisă pentru un punct material în raport cu un sistem inerțial arbitrar, are aspectul:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \quad (19.7)$$

Forța \vec{F} , ce acționează asupra punctului material, și impulsul lui relativist (19.5) nu sunt invariante față de transformările Lorentz. Regulile de transformare a forței și impulsului la trecerea de la un sistem inerțial de referință la altul se obțin din condiția de invarianță a legii (19.7) și relațiile de transformare a timpului și vitezei punctului material.

Toate forțele din natură au valori și timp de acțiune finit, deci conform legii (19.7), nu pot imprima punctelor materiale (corpurilor) impulsuri infinit de mari. Totodată, $\lim_{v \rightarrow c} \vec{P} = \infty$,

$\lim_{v \rightarrow c} \frac{d\vec{P}}{dt} = \infty$. Deci, și din legea (19.7) se impune concluzia, că viteza corpurilor în raport cu orice sistem inerțial nu poate atinge valoarea, egală cu viteza luminii în vid. Din aceeași lege (19.7) rezultă egalitatea

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = \vec{F},$$

din care se exprimă accelerația punctului material:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \left(\vec{F} - \vec{v} \frac{dm}{dt} \right). \quad (19.8)$$

Din formula (19.8) urmează: în mecanica relativistă accelerația imprimată punctului material depinde atât de forța \vec{F} ce acționează asupra lui, cât și de variația în timp a masei sale; accelerația este orientată la fel ca și forța \vec{F} doar în anumite cazuri particulare, pe care le vom cerceta în §19.3. Deocamdată observăm, că legea fundamentală a mecanicii clasice rezultă din legele (19.7), (19.8), dacă $v \ll c$ și $dm = 0$.

În spațiul cvadridimensional impulsul reprezintă un *cvadrivector*. O mărime fizică este un cvadrivector dacă proiecțiile sale pe axele spațio-temporale, numite componente ale cvadrivectorului, se transformă în conformitate cu transformările Lorentz la trecerea de la un sistem inerțial de referință la altul. *Componentele cvadrivectorului impuls* pe axele indicate sunt :

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad P_1 = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2 = y, \quad P_2 = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x_3 = z, \quad P_3 = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_4 = ict, \quad P_4 = \frac{m_0 ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Deoarece în spațiul cvadridimensional partea stângă a relației (19.7) reprezintă un cvadrivector, rezultă că și partea dreaptă este un cvadrivector, numit *cvadriforță*. Componentele *cvadriforței* se obțin din legea fundamentală (19.7), scrisă pe componente în spațiul cvadridimensional. Prezentăm componentele *cvadriforței* numai pentru $x_1 = x$, și $x_4 = i t c$:

$$x_1 = x, \quad \frac{d}{dt_0} \left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F_x \quad . \quad (19.10.x)$$

$$x_4 = i t c, \quad \frac{d}{dt_0} \left(\frac{m_0 i c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_4,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 i c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F_4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (19.10.t)$$

Derivatele din grupurile de relații (19.10.x)-(19.10.t) se calculează în raport cu timpul propriu t_0 și cu timpul t față de un sistem inerțial arbitrar. În aceste grupuri de relații F_1, F_2, F_3, F_4 reprezintă componentele *cvadriforței* pe axele indicate. Componentele spațiale F_1, F_2, F_3 sunt exprimate prin proiecțiile respective ale forței pe axele x, y, z ale sistemului de coordonate

în spațiul tridimensional și, în conformitate cu principiul de corespondență, sunt egale cu ele în cazul nerelativist $v \ll c$.

19.3. Energia cinetică. Legea interdependenței dintre masă și energie. Relația relativistă dintre energie și impuls

O consecință extrem de importantă a variației masei cu viteza este relația dintre masa și energia corpului—relație universal valabilă, cu implicații în toate domeniile fizicii moderne. Vom obține această relație, pornind de la teorema variației energiei cinetice:

$$dW_c = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

în care se substituie formula (19.7):

$$\begin{aligned} dW_c &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v} dt = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 \vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \right) \vec{v} dt = \\ &= \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = c^2 d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = c^2 dm; \quad (19.11) \\ &\left(\vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v}^2) = \frac{1}{2} d(v^2) = v dv, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2. \right) \end{aligned}$$

Am obținut relația dintre variațiile elementare ale energiei cinetice și masei relativiste. Se integrează relația (19.11) considerând că corpul cu viteza $v_0 = 0$ are energia W_0 , iar corpul în mișcare cu viteza v —energia W . Atunci, diferența $(W - W_0)$ reprezintă *energia cinetică a corpului în mecanica relativistă*. Menționăm, că energiile W_0, W nu includ energia potențială în câmpuri de forțe.

$$\begin{aligned} W_c = W - W_0 &= c^2 \int_0^v d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \\ &= m c^2 - m_0 c^2 \end{aligned} \quad (19.12)$$

Vom analiza relația obținută (19.12) după ce vom constata că ea urmează și din relația (19.10.t)), existentă doar în spațiul cvadridimensional – anume componenta temporală a legii fundamentale a dinamicii relativiste,

$$\frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 i c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} (mc^2).$$

Termenul din partea stângă reprezintă lucrul mecanic al forței în unitatea de timp, egal cu variația energiei corpului în unitatea de timp:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt}. \quad (19.13)$$

Atunci, obținem egalitatea:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (mc^2), \quad (19.14)$$

sau $dW = c^2 dm$. Integrând ultima egalitate în limitele variației masei de la m_0 la m , cărora le corespunde variația energiei de la W_0 la W , obținem relația (19.12):

$$\int_{W_0}^W dW = c^2 \int_{m_0}^m dm, \quad W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2.$$

Astfel, justificarea experimentală a relației (19.12) justifică și teoria spațiului cvadridimensional (spațiul Minkowsky).

Conform relației (19.12) energia cinetică a unui corp cu viteza ce se apropie de viteza luminii în vid crește rapid și diferă cu mult de energia cinetică calculată conform relației clasice. În cazul nerelativist, $v \ll c$, apelând la dezvoltarea în serie Taylor, obținem expresia energiei cinetice din mecanica clasică:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

$$W_c = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Energia corpului într-un sistem inerțial, față de care se mișcă cu viteza v , este

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \quad (19.15)$$

și se numește *energie totală*. Energia corpului în sistemul inerțial propriu

$$W_0 = m_0 c^2 \quad (19.16)$$

se numește *energie de repaus, sau energie proprie*. Această energie este dependentă de componența și starea internă a corpului

Conform relațiilor (19.11), (19.12) trecerea de la starea de repaus la cea de mișcare determină o variație a energiei, legată de variația masei:

$$\left. \begin{aligned} dW &= c^2 dm \\ \Delta W &= c^2 \Delta m \end{aligned} \right\} . \quad (19.17)$$

Relațiile (19.15)–(19.17), numite relațiile lui Einstein, exprimă *legea fundamentală de interdependență dintre masă și energie*: orice corp (particulă) care are masă, are și energie; oricărei variații a masei îi corespunde o variație a energiei și invers. Conform acestor relații, odată cu conservarea energiei are loc și conservarea masei. Astfel, spre deosebire de mecanica clasică, în care există două legi separate de conservare a masei și a energiei, în mecanica relativistă există numai legea conservării energiei. Este important să accentuăm, că relația (19.17) nu este o relație de identitate a masei cu energia, ea stabilește proporționalitatea dintre variațiile masei și energiei.

Legea interdependenței dintre masă și energie a fost confirmată experimental de cercetări efectuate în domeniul fizicii nucleare. Efectele energetice ale reacțiilor și dezintegrărilor nucleare, prezise pe baza acestei legi, se află într-o foarte bună concordanță cu rezultatele experimentale.

Relațiile dintre variațiile masei și a energiei ne permit să continuăm analiza egalității (19.8)

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \left[\vec{F} - \vec{v} \frac{dm}{dt} \right] = \frac{1}{m} \left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d(mc^2)}{dt} \right],$$

în care se substituie consecutiv formulele (19.14) și (19.13):

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{dW}{dt} \right] = \frac{1}{m} \left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F} \vec{v}) \right]. \quad (19.18)$$

Din această relație este evident că accelerația are aceeași direcție ca și forța ce o imprimă doar în următoarele două cazuri:

a) Forță transversală: $\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \vec{v} = 0$.

Atunci relația (19.18) se scrie:

$$\vec{a}_\perp = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0} \vec{F}.$$

Forța transversală provoacă doar variația direcției vitezei, modulul vitezei și masa corpului rămânând constante.

b) Forță longitudinală $\vec{F} \parallel \vec{v}$, $\vec{v} (\vec{F} \vec{v}) = \vec{F} v^2$.

Din relația (19.18) rezultă :

$$\vec{a}_\parallel = \frac{\vec{F}}{m} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] = \frac{\vec{F}}{m_0} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Forța longitudinală imprimă corpului o accelerație de $\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1}$

ori mai mică decât accelerația imprimată de forța transversală de același modul. Explicația este următoarea: forța longitudinală provoacă variația modulului vitezei, deci și al masei corpului.

În mecanica clasică energia cinetică și impulsul punctului material sunt legate prin relația:

$$W_c = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{P^2}{2m_0}.$$

În mecanica relativistă se deduce o relație dintre energia totală, energia de repaus și impuls. Din dependența masei de viteză (19.4) urmează:

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2.$$

Înmulțind ambele părți cu c^4 , obținem:

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4, \quad W^2 - P^2 c^2 = W_0^2 = \text{inv}. \quad (19.19)$$

Relația obținută dintre energia totală și impulsul relativist este invariantă față de schimbarea sistemului inerțial de referință, ca și intervalul spațio-temporal dintre două evenimente.

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1

Se consideră două evenimente $E_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ și $E_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ în referențialul K . Considerând că referențialul K' are o mișcare de translație față de K cu viteza constantă \vec{V} în sistemul pozitiv al axei ox : a) Să se scrie coordonatele evenimentelor $E_1(x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = 0)$ și $E_2(x_2, y_2 = z_2 = 0, t_2)$ în K' ; b) Să se determine condițiile în care evenimentele E_1 și E_2 au loc în același moment în K' și condițiile în care evenimentele au loc în același punct în K' .

Rezolvare:

a) Coordonatele evenimentelor E_1 și E_2 în K' sunt date de transformările Lorentz (18.8): $x'_1 = y'_1 = z'_1 = t'_1 = 0$ pentru

evenimentele $E_1, x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, $y'_2 = z'_2 = 0$, $t'_2 = \frac{t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ pentru

evenimentul E_2 .

b) Pentru determinarea condițiilor în care evenimentele E_1 și E_2 au loc în același moment în K' vom apela la invarianța în raport cu referențialele inerțiale a intervalului dintre două evenimente,

$$S^2 = (S')^2, \quad l^2 - c^2(\Delta t)^2 = (l')^2 - c^2(\Delta t')^2,$$

unde

$$l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (l')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.$$

Deoarece $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$, obținem:

$$S^2 = (l')^2$$

Prin urmare, condiția necesară ca evenimentele să se producă în același moment în K' este $S^2 > 0$. În cazul particular în care $t'_1 = 0, t'_2 = 0$ din transformarea Lorentz pentru t'_2 urmează $t_2 = \frac{Vx_2}{c^2}$. Considerând că coordonatele spațiale ale evenimentelor

E_1 și E_2 sunt cele indicate în punctul a, rezultă:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_2^2,$$

adică $l = x_2$. Atunci $\Delta t = t_2 = \frac{Vl}{c^2}$ și

$$S^2 = l^2 - c^2(\Delta t)^2 = l^2 - c^2 \frac{V^2 l^2}{c^4} = l^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) > 0, \quad \text{deoarece } \frac{V}{c} < 1.$$

Dacă evenimentele E_1 și E_2 , cu coordonatele corespunzătoare punctului a) au loc în același punct al referențialului K' , adică $x'_1 = x'_2 = 0$, din transformarea Lorentz pentru x'_2 rezultă:

$$x_2 = Vt_2, \quad V = \frac{x_2}{t_2} = \frac{l}{\Delta t}.$$

Condiția că $V < c$ conduce la inegalitatea:

$$S^2 = l^2 - c^2(\Delta t)^2 = V^2(\Delta t)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta t)^2(V^2 - c^2) < 0,$$

care reprezintă condiția ca evenimentele să se producă în același punct în K' . Totodată, din transformarea Lorentz pentru t'_2 ,

luându-se în considerație că $V = \frac{x_2}{t_2} < c$ urmează inegalitatea

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - \frac{x_2^2}{c^2 t_2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{c^2 t_2^2 - x_2^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} c^2 t_2^2} > 0.$$

Deci t'_2 , are același semn cu t_2 , adică evenimentele se succed în aceeași ordine în referențialele K și K' .

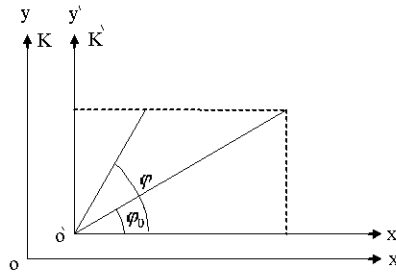
Problema 2

O bară cu lungimea proprie l_0 se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza V paralelă față de axa ox a sistemului K în repaus. În referențialul propriu K' direcția barei formează unghiul φ_0 cu axa $O'x'$. Care este lungimea barei în raport cu sistemul K ? Care este unghiul φ dintre direcția barei și viteza sa, măsurat de un observator din K ?

Rezolvare:

În raport cu sistemul propriu K' bara are următoarele proiecții pe x' și y'

$$l_{0x'} = l_0 \cos \varphi_0; l_{0y'} = l_0 \sin \varphi_0.$$



În raport cu sistemul K proiecțiile lungimii barei pe x și y sunt:

$$l_x = l_{0x'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cos \varphi_0; \quad l_y = l_{0y'} = l_0 \sin \varphi_0.$$

La scrierea ultimelor relații s-a luat în considerație contracția lungimii barei pe direcția mișcării. În rezultat, lungimea barei față de K este:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = l_0 \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0} = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \varphi_0}$$

Pentru un observator solidar cu K unghiul dintre direcția barei și viteza sa satisface relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l_y}{l_x} = \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \varphi_0}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ adică } \varphi > \varphi_0$$

Problema 3

Pentru o particulă liberă cu masa de repaus m_0 se cere:

- a) să se exprime viteza și energia în funcție de impuls;*
- b) să se exprime mărimea vitezei și a impulsului în funcție de energia cinetică;*
- c) să se exprime cu ajutorul impulsului și a energiei cinetice condiția ca particula să fie nerelativistă, respectiv ultrarelativistă;*
- d) să se studieze relația dintre viteză, impuls și energia cinetică în limita nerelativistă și în limita ultrarelativistă.*

Rezolvare:

a) Cunoaștem formulele:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E = mc^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

respectiv pentru impulsul relativist, energia totală relativistă și masa de mișcare a particulei.

Formula pentru masa de mișcare se ridică la pătrat și se înmulțește cu v^2 .

Obținem viteza v în funcție de impuls.

$$m^2 v^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad p^2 = v^2 \left(\frac{p^2}{c^2} + m_0^2 \right), \quad v = c \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}.$$

Formula pentru masa de mișcare, ridicată la pătrat, se înmulțește cu c^4 .

După transformări elementare obținem energia totală în funcție de impuls.

$$m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \\ E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}.$$

b) Din penultima expresie, obținută în punctul a) adică $E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$, exprimăm v , substituind $p = mv$;

$$v = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{m^2 c^2}} = c \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{E}.$$

Amintim expresia energiei cinetice relativiste $E_c = E - m_0 c^2 = E - E_0$, din care exprimăm și substituim în egalitatea de mai sus energia totală E ,

$$v = c \frac{\sqrt{(E_c + E_0)^2 - E_0^2}}{E_c + E_0} = c \frac{\sqrt{E_c(E_c + 2E_0)}}{E_c + E_0} = c \frac{\sqrt{E_c(E_c + 2m_0 c^2)}}{E_c + m_0 c^2}.$$

Deoarece din relația dintre energia totală și impuls urmează:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4},$$

nu ne rămâne decât să substituim aceeași expresie pentru energia totală. Obținem:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_c (E_c + 2m_0 c^2)}.$$

c) O particulă se consideră nerelativistă, dacă viteza ei $v \ll c$, adică:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1.$$

Prin urmare, impulsul particulei p satisface condiția: $p \cong m_0 v \ll m_0 c$. Impunând condiția $v \ll c$ expresiei energiei cinetice obținem:

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \ll m_0 c^2.$$

Reciproc: dacă $p \ll m_0 c$ rezultă :

$$\frac{v}{c} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} \cong \frac{p}{m_0 c} \ll 1;$$

dacă $E_c \ll m_0 c^2$, atunci:

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{E_c (E_c + 2m_0 c^2)}}{E_c + m_0 c^2} \cong \frac{\sqrt{E_c \cdot 2m_0 c^2}}{m_0 c^2} = \sqrt{\frac{2E_c}{m_0 c^2}} \ll 1.$$

Prin urmare, condițiile: $\frac{v}{c} \ll 1$; $p \ll m_0 c$; $E_c \ll m_0 c^2$; sunt echivalente în descrierea mișcării nerelativiste a unei particule libere.

Cazul ultrarelativist se realizează dacă: $1 - \frac{v^2}{c^2} \ll 1$. Atunci:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ll 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \gg 1, \quad v \cong c; \quad m \gg m_0;$$

Rezultă că impulsul și energia cinetică a particulei ultrarelativiste îndeplinesc condițiile:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong mc \gg m_0 c,$$

$$E_c = (m - m_0)c^2 \cong mc^2 \gg m_0 c^2.$$

Reciproc, dacă $p \gg m_0 c$, atunci :

$$v = c \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} \cong c \frac{p}{\sqrt{p^2}} = c,$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2} \cong \frac{m_0^2 c^2}{p^2} \ll 1.$$

În mod analog , dacă $E_c \gg m_0 c^2$, atunci:

$$v = c \frac{\sqrt{E_c(E_c + 2m_0 c^2)}}{E_c + m_0 c^2} \cong c \frac{\sqrt{E_c^2}}{E_c} = c,$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(E_c + m_0 c^2)^2} \cong \left(\frac{m_0 c^2}{E_c} \right)^2 \ll 1..$$

Prin urmare, condițiile: $1 - \frac{v^2}{c^2} \ll 1$, $p \gg m_0 c$, $E_c \gg m_0 c^2$ sunt echivalente în descrierea mișcării ultrarelativiste a particulei libere.

d) Să obținem relația dintre viteză, impuls și energie

cinetică în cazul nerelativist $\frac{v}{c} \ll 1$. $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong m_0 \vec{v}$.

Vom obține o expresie nerelativistă pentru energia cinetică E_c , folosind descompunerea în seria binominală Taylor, anume:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

Astfel, limitându-ne la primii doi termeni, obținem:

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2},$$

Observăm, că: $E_c = \frac{p^2}{2m_0}$. În cazul ultrarelativist $E \gg m_0 c^2$,

$$v \cong c. \text{ Atunci: } p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} \cong \frac{E}{c} \cong \frac{E_c}{c}. \text{ Totodată}$$

$$m = \frac{p}{v} \cong \frac{E}{c^2} \cong \frac{p}{c}.$$

Întrebări de verificare

1. În ce constă esența principiului relativității în mecanica clasică? Să se compare acest principiu cu postulatul I al teoriei relativității restrânse.
2. Să se explice raționamentele, în baza cărora se obțin relațiile de transformare Lorentz.
3. Să se demonstreze corectitudinea afirmației: succesiunea evenimentelor cauză-efect este invariantă față de transformările Lorentz.
4. În ce condiții două evenimente sunt simultane față de orice sistem inerțial de referință ?
5. Să se calculeze viteza corpului, pentru care contracția dimensiunii pe direcția mișcării este de 25%.
6. Să se arate că formula relativistă a compunerii vitezelor respectă postulatul II al teoriei relativității restrânse și principiul de corespondență.
7. În baza relației de variație relativistă a masei cu viteza să se arate că nici un corp nu poate avea sau depăși viteza luminii în vid.
8. Să se explice deosebirile dintre legea fundamentală a mecanicii clasice și legea fundamentală a mecanicii relativiste.
9. Să se definească energia cinetică în mecanica relativistă și să se arate că formula de calcul a ei respectă principiul de corespondență.
10. Să se explice legea fundamentală de interdependență dintre masă și energie.

IV. Bazele fizicii moleculare și ale termodinamicii

§20. Metode de studiu ale sistemelor macroscopice

20.1. Metodele statistică și termodinamică

Una din problemele importante ale fizicii o constituie studiul fenomenelor termice, determinate de comportarea unui număr foarte mare de particule (atomi, molecule), de ordinul $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, ce intră în componența corpului sau sistemului considerat de corpuri, numit sistem macroscopic. Pentru a descrie proprietățile sistemului macroscopic și fenomenele ce se produc în el sunt necesare metode adecvate unui număr mare de particule. În prezent se aplică două metode, ce se completează reciproc-metoda termodinamică și metoda statistică.

În prima jumătate a sec. XIX a apărut metoda termodinamică, dezvoltată în lucrările lui R.Clausius, S.Carnot, W.Thomson, R.Mayer, J.Joule, etc. Termodinamica, ca parte a fizicii, are un caracter fenomenologic, ceea ce înseamnă că se bazează pe sistematizarea și generalizarea datelor experimentale, care au condus la formularea a trei principii fundamentale. Justificarea acestor principii rezultă din succesele obținute în explicarea fenomenelor termice. Relațiile cantitative, prin care se descriu transformările energiei, permit să se studieze proprietățile fizice ale sistemului macroscopic în cele mai diverse procese. Termodinamica este una din cele mai importante ramuri ale fizicii, deoarece principiile ei sunt aplicabile pentru orice sistem macroscopic fără a fi necesară descrierea microscopică a acestuia și a caracterului mișcării particulelor componente.

A doua metodă, numită statistică, este cea aplicată în fizica statistică, dezvoltată în jumătatea a doua a sec. XIX în lucrările savanților J.Maxwell, L.Boltzmann, D.Cibbs, etc. În fizica statistică se deduc legile, ce descriu sistemele macroscopice,

reeșind din anumite modele ale structurii interne ale acestora; se stabilesc legături între proprietățile microscopice și cele macroscopice ale sistemului cercetat, adică se explică proprietățile macroscopice ca un rezultat sumar al acțiunilor particulelor componente. Mișcarea fiecărei particule se supune legilor mecanicii. Dar este evidentă imposibilitatea aplicării acestor legi fiecărei particule dintr-un sistem macroscopic. În cadrul fizicii statistice nu se studiază mișcarea fiecărei particule în parte, dar mișcarea ansamblului de particule din sistem, mișcare care se deosebește calitativ de cea mecanică, fiind descrisă de legi statistice, în care noțiunea de bază este cea de probabilitate. De exemplu, se poate determina probabilitatea ca o particulă oarecare să aibă la un moment dat o anumită poziție (coordonată) sau viteză (impuls). Totodată, pentru studiul statistic al unui sistem macroscopic se utilizează noțiunea de probabilitate de distribuție (probabilitate termodinamică) a particulelor componente în diferite stări posibile pentru ele.

Astfel, prin aplicarea metodei statistice se realizează scopul de a deduce proprietățile sistemului macroscopic și relațiile dintre mărimile fizice prin care le descriem din proprietățile sale microscopice. Prin realizarea acestui scop se obțin mărimi macroscopice, care nu au corespondent în mecanică (de exemplu temperatura) și relații între ele (de exemplu ecuația de stare a sistemului considerat).

Totodată, fizica statistică mai urmărește un scop-stabilirea legilor termodinamice pornind de la structura concretă a sistemului macroscopic considerat. Realizarea acestui foarte important scop, uneori dificilă din cauza aparatului matematic complicat, înseamnă, de fapt, explicarea legilor respective, evidențierea caracterului lor statistic. Demonstrațiile și deducerile din fizica statistică au un caracter general și se aplică atât la rezolvarea problemelor clasice (de exemplu, studiul unui gaz), cât și a celor cuantice (mișcarea atomilor în metale, a fotonilor într-o incintă închisă).

În încheiere, conchidem că fizica statistică și termodinamica, aplicate împreună, reprezintă o teorie completă a sistemelor macroscopice.

În acest capitol se vor descrie legile și metodele fizicii statistice clasice, aplicate pentru studiul gazelor. Aspecte și particularități ale fizicii statistice cuantice vor fi prezentate ulterior, după introducerea elementelor de fizică cuantică.

20.2. Parametri de stare, procese termodinamice

Sistemele macroscopice, numite și sisteme termodinamice dacă sunt studiate prin metode termodinamice, sunt caracterizate printr-un număr finit de mărimi fizice, numite parametri *de stare sau parametri macroscopici*: volumul V , presiunea p , temperatura T , concentrația n , etc. Pentru anumite sisteme se mai folosesc și parametri din alte domenii ale fizicii, cum ar fi densitatea de sarcină electrică. Totalitatea parametrilor care caracterizează complet un sistem termodinamic determină *starea* acestuia. Acei parametri care pot fi mășurați local și care nu depind de masa sistemului se numesc *parametri intensivi* (de exemplu presiunea, temperatura). Parametrii care pot fi mășurați numai pentru întregul sistem (global) și valorile cărora depind de masa sistemului (de exemplu volumul, energia internă) se numesc *parametri extensivi*.

Parametrii macroscopici se mai clasifică în parametri interni și *parametri externi*. Parametrii externi, sau de poziție, sunt funcții de coordonatele corpurilor, externe față de sistemul considerat. Exemplu de astfel de parametru este volumul sistemului. *Parametri interni* ai unui sistem sunt acele mărimi care depind atât de poziția corpurilor externe cât și de coordonatele și vitezele particulelor componente ale sistemului (de exemplu presiunea, energia internă).

Starea sistemului macroscopic, determinată de parametrii macroscopici, este numită *stare macroscopică sau macrostare*. Totodată, din punct de vedere microscopic, starea unui sistem se caracterizează prin valori momentane ale coordonatelor și

impulsurilor particulelor constituente, numite parametri microscopici. Starea sistemului, determinată de parametrii microscopici, se numește *stare microscopică* sau *microstare*.

Un sistem macroscopic se află în stare de *echilibru termodinamic* (denumit și termic, static) dacă parametrii macroscopici ce îi definesc starea nu variază în timp și fiecare din ei are aceeași valoare în întreg sistemul. Din această definiție rezultă că valorile acestor parametri nu sunt condiționate de procese din mediul exterior, iar în sistemul considerat nu există fluxuri de energie, substanță, impuls. Orice sistem, neinfluențat din exterior, cu timpul ajunge în starea de echilibru și rămâne în ea un timp nelimitat. Totodată, variabilele microscopice ce caracterizează particulele individuale din sistemul în echilibru se pot modifica continuu, adică se poate modifica continuu microstarea, dar astfel încât macrostarea rămâne neschimbată. Așadar, din punct de vedere clasic, există o infinitate de stări microscopice, compatibile cu o macrostare de echilibru dată. Altfel spus, starea macroscopică nu determină complet starea microscopică, dar starea microscopică determină complet starea macroscopică.

Orice variație a stării macroscopice a sistemului, caracterizată prin variația parametrilor macroscopici, poartă denumirea de *proces* sau *transformare termodinamică*. Procesul termodinamic este numit de echilibru dacă, realizându-l, sistemul trece printr-un șir continuu de stări de echilibru infinit apropiate una de alta. Evident, *procesul de echilibru* este o abstracție a oricărui proces real, care este cu atât mai aproape de procesul de echilibru, cu cât decurge mai lent. De aceea procesele de echilibru mai sunt numite și cvasistatice, adică procese ce se produc cu viteză infinit mică.

În dependență de modurile posibile de izolare a sistemului considerat de mediul exterior se deosebesc câteva tipuri de sisteme termodinamice. Sistemul termodinamic care face schimb de substanță cu mediul exterior este numit *sistem deschis*, în caz contrar se numește *sistem închis*. Sistemul care nu face schimb de substanță și de energie cu mediul exterior este un *sistem izolat*.

Sistemul este izolat mecanic dacă nu schimbă cu mediul exterior substanță și energie prin efectuarea lucrului mecanic. *Sistemul este izolat adiabatic* dacă lipsește schimbul de substanță și energie prin schimbul de căldură cu mediul exterior. Un *sistem termodinamic* se numește *simplu* dacă nu este supus acțiunii câmpurilor externe.

§ 21. Ecuații termice de stare

S-a constatat experimental că în cazul în care se cunosc valorile tuturor parametrilor de stare cu excepția unuia, atunci acesta poate fi complet determinat. Prin urmare, între parametrii de stare există o dependență exprimată printr-o relație de forma

$$f(p, V, m, T \dots) = 0$$

numită *ecuație de stare*. Această ecuație se stabilește experimental sau se deduce în cadrul fizicii statistice, prin metode termodinamice deducerea ei nu este posibilă. Ecuația de stare care exprimă relația dintre presiunea p , volumul V , și temperatura T a unui sistem omogen simplu de masă m se numește ecuație termică de stare.

21.1. Gaz ideal. Limitele de aplicabilitate a teoriei gazului ideal

Din cursul preuniversitar de fizică se cunoaște ecuația termică de stare a gazului ideal, numită și ecuația Clapeyron-Mendeleev

$$pV = \nu RT, \quad p = nkT \quad \left(\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}, n = \frac{N}{V} \right), \quad (21.1)$$

unde ν este numărul de moli, M – masa molară, N - numărul de molecule și N_A este constanta Avogadro. Amintim că cel mai simplu sistem termodinamic, numit gaz ideal (perfect), reprezintă un model simplificat al gazului real, valabil atunci când se poate considera:

a) moleculele au dimensiuni neglijabile față de distanțele medii dintre ele, deci volumul moleculelor poate fi neglijat în comparație cu volumul ocupat de gaz;

b) forțele de interacțiune, adică și energia potențială de interacțiune dintre moleculele gazului, la distanțe deosebite de zero, sunt neglijabile;

c) ciocnirile dintre molecule și pereții recipientului sunt elastice. În condiții normale

$$(p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mm col Hg} \approx 1 \text{ atm}, T = 273 \text{ K})$$

în $V = 1 \text{ m}^3$ de aer există aproximativ $2,7 \cdot 10^{25}$ molecule, distanța medie dintre ele fiind $3,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Această distanță întrece de zece ori diametrul moleculelor $d \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, interacțiunea la distanță dintre ele lipsește, gazul poate fi considerat ideal. Experimental s-a constatat că produsul pV se menține practic constant la $T = 300 \text{ K} = \text{const}$, până la presiuni de aproximativ $10 \text{ atm} \approx 10^6 \text{ Pa}$. Prin acest fapt se explică de ce în calculele ce intervin în proiectarea mașinilor cu vapori sau a motoarelor cu ardere internă se poate folosi, într-o aproximație destul de bună, teoria gazului ideal. În general, aplicarea modelului gazului ideal și a ecuației (21.1) pentru descrierea gazelor reale se consideră justificată numai în cazul presiunilor relativ mici (gaze rarefiate) și a temperaturilor înalte.

La presiuni de ordinul $10^2 \div 10^3 \text{ atm}$ produsul pV nu mai rămâne constant la $T = \text{const}$: la început pV scade și apoi crește brusc cu creșterea presiunii. Acest fenomen se explică prin faptul că prin mărirea treptată a presiunii, inițial moleculele se apropie la distanțe la care apar forțe de atracție, această atracție slăbește intensitatea ciocnirilor moleculelor de pereții recipientului și diminuează presiunea gazului. La presiuni mai mari distanța dintre molecule devine atât de mică încât se manifestă forțele de respingere dintre molecule, în rezultat presiunea crește.

În tehnica actuală presiunile mari au un spectru foarte larg de utilizare. Gazele se păstrează și se transportă în recipiente sub presiuni de $150\text{-}200 \text{ atm}$. La astfel de presiuni gazul real nu mai poate fi considerat ideal.

21.2. Ecuații de stare ale gazelor reale

Determinarea ecuației de stare a gazelor reale prezintă interes atât teoretic cât și practic. Cunosând o astfel de ecuație se pot stabili legități ce caracterizează forțele de interacțiune a moleculelor, se pot calcula procese tehnice ce se produc la presiuni înalte sau temperaturi joase. Datorită dependenței interacțiunii dintre molecule de tipul moleculelor, comportarea fiecărui gaz real trebuie descrisă printr-o ecuație de stare specifică lui. O ecuație de stare generală, valabilă pentru toate gazele reale poate fi dată doar aproximativ.

Aplicații practice și un interes deosebit prezintă procesele legate de schimbările stărilor de agregare, cum sunt comprimarea și lichefierea gazelor, evaporarea și fierberea lichidelor. Pentru studiul acestor procese este utilă găsirea unei ecuații de stare (fie și aproximativă), care să descrie domeniul tuturor stărilor posibile ale sistemului, de la gazul ideal până la starea lichidă. O astfel de ecuație a fost obținută în 1873 de fizicianul olandez Van der Waals, pornind de la următoarele ipoteze:

1. Spre deosebire de un gaz ideal, închis într-un recipient de volum V , unde molecula (fără volum propriu) se poate afla în orice punct al acestui volum, molecula gazului real (cu volum propriu) nu se poate afla în acele locuri ale recipientului, în care sunt situate celelalte $(N-1)$ molecule. Molecula considerată are la dispoziție volumul, egal cu $(V-b)$, unde b este numit volum inaccesibil sau covolum. Se demonstrează că b este de patru ori mai mare decât volumul propriu al tuturor N molecule de gaz

$$b = 4N \frac{4}{3} \pi r^3,$$

unde r este raza moleculei.

2. Analiza forțelor de interacțiune a moleculelor gazului conduce la următoarele concluzii. Forțele de atracție reciprocă a moleculelor nu influențează mișcarea lor în interiorul gazului, unde presiunea gazului real este egală cu cea a gazului ideal, aflat în condiții identice. Lângă pereții recipientului presiunea este mai mică decât în interior cu mărimea p_i , numită presiune internă.

Presiunea internă reprezintă presiunea suplimentară cu care stratul de molecule vecin cu peretele acționează asupra gazului. Apariția presiunii interne se explică astfel: asupra fiecărei din moleculele, ce formează stratul de gaz vecin cu peretele, acționează o forță rezultantă din partea celorlalte molecule de gaz, orientată perpendicular pe perete, în interior. Se deduce că presiunea internă este invers proporțională cu pătratul volumului gazului și depinde de natura lui chimică prin coeficientul a .

Având în vedere aceste două ipoteze Van der Waals a obținut ecuația de stare, ce îi poartă numele

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{m}{M} RT. \quad (21.2)$$

Valorile lui a și b urmează să fie găsite din experiență și din acest punct de vedere ecuația (21.2) este empirică (experimentală). Se

obține că b este proporțională cu numărul de moli $\nu = \frac{m}{M}$ din

volumul dat, iar a este proporțională cu ν^2 . Când aceste constante se determină pentru un mol al gazului considerat, ecuația (21.2) se scrie pentru un număr arbitrar de moli astfel:

$$\left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b_\nu) = \nu RT. \quad (21.3)$$

La deducerea ecuației (21.2) s-au făcut o serie de aproximații simplificatoare, de aceea ea trebuie considerată o ecuație aproximativă de stare a gazului real. Această ecuație dă o bună imagine calitativă a variației stării gazului real, dar din ea nu se pot obține rezultate cantitative exacte. Pentru a obține valori exacte pentru presiunea p este necesar ca mărimile a și b să nu fie considerate constante, dar dependente de temperatură și densitate. S-a ajuns ca pentru gazele reale să se stabilească peste 150 ecuații de stare, fiecare din ele fiind valabilă pentru anumite gaze reale și în anumite condiții.

Să comparăm izotermele experimentale ale unui gaz real (fig.4.1) cu cele teoretice, obținute din ecuațiile (21.1) și (21.2). La temperaturi suficient de înalte se realizează izoterme de forma

KL , practic identice cu izotermele gazului ideal. La temperaturi joase gazul real poate fi comprimat izoterm din starea A numai până în starea B , când începe să se lichefieză. În continuare izoterma reală, adică obținută experimental, urmează porțiunea orizontală BF , ce indică domeniul de echilibru între stările lichidă și gazoasă ale substanței. Vaporii aflați în echilibru cu lichidul din care provin se numesc vaporii saturați.

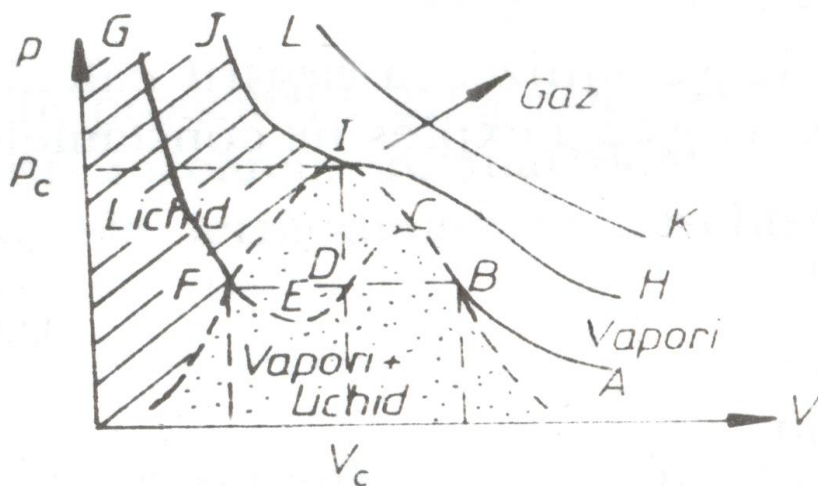


Fig. 4.1

Rezultatele analizei porțiunii $BCDEF$, obținute teoretic din rezolvarea ecuației (21.3), sunt următoarele: porțiunea CDE nu poate fi realizată experimental, deoarece unei creșteri a presiunii îi corespunde o creștere a volumului; porțiunile BC și EF se pot realiza numai în condiții speciale; stările corespunzătoare porțiunilor BC și EF se numesc metastabile, deoarece o variație oricât de mică a condițiilor în care au fost realizate conduce la trecerea sistemului în stările corespunzătoare segmentului BF ; vaporii care au stări corespunzătoare porțiunii BC se numesc suprasaturați; stările de pe porțiunea EF sunt stări de supraîncălzire.

Lichefierea gazelor reale prin comprimare izotermă este posibilă numai la temperaturi mai mici decât temperatura critică-temperatură la care dispar deosebirile dintre proprietățile fizice ale stărilor lichidă și gazoasă ale substanței, ambele stări fiind în echilibru. Izoterma ce corespunde temperaturii critice (curba *HIJ*, fig.4.1) variază monoton, cu excepția punctului critic *I*, care este punct de inflexiune și în care are loc o trecere directă din starea gazoasă în cea lichidă. În acest punct tangenta la izotermă este orizontală. Mărimile p_c , V_c se numesc mărimi critice și reprezintă presiunea maximă la care mai pot exista vapori saturați ai substanței, respectiv volumul maxim pe care îl poate ocupa substanța în stare lichidă. Menționăm că din definiția temperaturii critice urmează că în starea critică a substanței, definită prin T_c , p_c , V_c , volumele molare ale lichidului și vaporilor săi saturați sunt egale; căldura specifică de vaporizare și tensiunea superficială a lichidului sunt egale cu zero; densitățile lichidului și a vaporilor săi saturați devin egale.

Unele gaze au temperatura critică foarte joasă: oxigen-90 K; azot-77,4 K; hidrogen- 20,5 K; heliu-4,4 K. Ca urmare, lichefierea lor necesită o răcire prealabilă până la o temperatură mai joasă decât temperatura critică. Lichefierea gazelor și obținerea unor temperaturi foarte joase, apropiate de 0 K, au aplicații deosebite în știință și tehnică, deoarece la aceste temperaturi substanțele posedă proprietăți diferite de cele cunoscute la temperaturi apropiate de cea normală. De exemplu, la temperaturi joase au fost descoperite fenomenele de suprafluiditate și de supraconductibilitate electrică. Prin lichefierea gazelor se pot obține temperaturi până la 4,21 K (helium lichid). Dacă heliul este adus la fierbere sub o presiune foarte joasă, atunci temperatura sa poate fi coborâtă până la aproximativ 1 K. Pentru menținerea presiunii foarte joase se îndepărtează permanent, prin pompare, vaporii de deasupra heliului.

Există metode de obținere a temperaturilor sub 1 K. Una din cele mai importante, numită răcire magnetică, se bazează pe demagnetizarea adiabatică a sărurilor paramagnetice.

***Teoria cinetico-moleculară a gazelor**

Teoria cinetico-moleculară a gazelor este o parte componentă a fizicii statistice clasice. În această teorie se consideră că particulele constituente ale sistemului macroscopic sunt moleculele, aflate în mișcare dezordonată. Principiile generale ale fizicii statistice clasice, care stau la baza teoriei cinetico-moleculare, se formulează astfel:

a) În sistemul considerat se respectă toate legile universale de conservare și se menține constant numărul de particule, dacă sistemul este închis și în el nu se produc reacții chimice.

b) Procesele fizice din sistem decurg continuu în spațiu și timp.

c) Fiecare particulă din sistem poate să posede orice valori ale coordonatelor (în limitele volumului sistemului) și componentelor vitezei, independent de valorile acestor caracteristici pentru celelalte particule.

d) Se admite posibilitatea de a deosebi una de alta particulele dintr-un sistem omogen (particule discernabile).

§22. Ecuația de bază a teoriei cinetico-moleculare a gazului ideal

Unul din scopurile fizicii statistice constă în explicarea proprietăților macroscopice ale sistemului considerat ca fiind un rezultat sumar al acțiunii tuturor moleculelor. Deducerea ecuației de bază a teoriei cinetico-moleculare a gazului ideal este o realizare a acestui scop pentru sistemul macroscopic indicat.

În cele ce urmează în acest paragraf vom recapitula rezultatele deducerii ecuației de bază a gazului ideal în stare de echilibru, studiate în cursul preuniversitar. Totodată menționăm, că ecuația de bază a gazului ideal se poate deduce strict pe baza distribuției moleculelor gazului ideal după viteze, descrise în §24.

Presiunea gazului $p = \frac{dF}{ds}$ este egală cu forța medie, normală, cu care moleculele gazului, ciocnindu-se de pereții recipientului, acționează asupra unității de suprafață. Presupunând că: toate moleculele au aceleași valori v ale vitezelor; toate direcțiile de mișcare ale moleculelor sunt la fel de probabile; gazul nu este supus acțiunii câmpurilor externe de forțe-se obțin următoarele expresii pentru presiunea gazului:

$$p = \frac{N}{3} \frac{mv^2}{V} = \frac{2}{3} n \frac{mv^2}{2}, \quad (22.1)$$

unde N este numărul total de molecule de masă m fiecare, dintr-un recipient cu volumul V , iar $n = \frac{N}{V}$ este concentrația gazului.

În realitate, valorile vitezelor moleculelor v_k sunt diferite și aceste valori nu au aceeași probabilitate. Energia mișcării de translație a moleculelor gazului ideal este

$$W = \sum_{k=1}^N W_k = \sum_{k=1}^N \frac{mv_k^2}{2}. \quad (22.2)$$

Se definește *energia medie a mișcării de translație a unei molecule* \overline{W}_{tr} ,

$$\overline{W}_{tr} = \frac{1}{2} m \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}, \quad (22.3)$$

unde mărimea

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k^2, \quad (22.4)$$

reprezintă media pătratelor vitezelor moleculelor gazului. Extrăgând rădăcina pătrată din această medie se obține *viteza pătratică medie (viteza termică)* a moleculelor gazului

$$\overline{v}_{pat} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2)}. \quad (22.5)$$

Anume această viteză trebuie folosită pentru calculul presiunii p din relația (22.1). Prin urmare, pentru presiunea gazului ideal obținem expresiile

$$p = \overline{p} = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \overline{W}_{tr} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{W}_{tr}, \quad (22.6)$$

care reprezintă *ecuația de bază a teoriei cinetico-moleculare a gazului ideal*. În această ecuație presiunea gazului se exprimă prin viteza pătratică medie sau energia cinetică medie de translație a unei molecule-mărimi fizice statistice, ce caracterizează mișcarea moleculelor din întreg sistemul considerat, și care își pierde sensul în cazul unui număr mic sau al unei singure molecule. Conform ecuației (22.6), presiunea gazului nu depinde de substanța din care e constituit recipientul, adică nu depinde de caracterul ciocnirilor dintre molecule și pereții recipientului. Acest rezultat este în concordanță cu demonstrațiile lui Maxwell: în cazul gazului ideal presiunea gazului nu depinde de caracterul ciocnirilor moleculă-perete și al ciocnirilor dintre molecule.

Din compararea ecuației de bază (22.6) cu ecuația termică de stare a gazului ideal (22.1) rezultă o altă relație fundamentală ce exprimă legătura dintre temperatura termodinamică T și energia cinetică medie de translație a unei molecule

$$\left. \begin{aligned} pV &= \frac{2}{3} N \overline{W}_{tr}, \\ pV &= \frac{N}{N_A} RT = NkT, \end{aligned} \right\} \overline{W}_{tr} = \frac{3}{2} kT. \left(k = \frac{R}{N_A} \right). \quad (22.7)$$

Energia cinetică medie de translație a moleculei gazului ideal depinde numai de temperatura termodinamică T , fiind direct proporțională cu ea. Această concluzie, ca și întreaga fizică statistică clasică, nu este valabilă pentru temperaturi joase, apropiate de 0 K. Mai putem afirma: temperatura termodinamică este măsura cantitativă a energiei cinetice medii de translație a moleculelor gazului ideal.

Din formulele (22.3), (22.7) se obține următoarea relație pentru viteza pătratică medie:

$$\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} kT, \overline{v}_{pat} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (M = mN_A) \quad (22.8)$$

Relațiile (22.3)-(22.8) indică clar faptul, că parametrii macroscopici ai sistemului termodinamic sunt determinați nu de parametrii microscopici individuali, ce caracterizează fiecare moleculă, dar de parametrii microscopici statistici.

§ 23. Elemente de statistică Maxwell-Boltzmann

23.1. Echilibru statistic. Probabilitatea de distribuție (probabilitatea sau ponderea termodinamică)

Considerăm un sistem izolat, constituit din N particule identice, discernabile, ce nu reacționează chimic între ele. Fiecare din particule poate avea una din energiile

$$W_1, W_2, \dots, W_m.$$

Aceste valori ale energiei particulelor pot fi cuantificate, sau pot forma un spectru continuu ca în cazul energiilor cinetice de translație a moleculelor unui gaz. Un spectru energetic continuu se împarte în intervale mici, considerând pentru fiecare interval valoarea medie a energiei. Presupunem că la un moment dat particulele sunt distribuite astfel încât N_1 dintre ele au energia W_1 , N_2 au energia W_2 , etc

$$\begin{aligned} W_1, W_2, W_3, \dots, W_i, \dots, W_m \\ N_1, N, N_3, \dots, N_i, \dots, N_m. \end{aligned} \quad (23.1)$$

Numerele N_1, N_2, \dots, N_m constituie o distribuție a particulelor sistemului după energii. În sistemul considerat se respectă legile conservării numărului de particule

$$\sum_{i=1}^m N_i = N = const, \quad (23.2)$$

și a energiei

$$\sum_{i=1}^m N_i W_i = W = const. \quad (23.3)$$

Expresia legii conservării energiei (23.3) presupune implicit, că interacțiunea dintre particulele sistemului este neglijabil de slabă. În caz contrar sumei din expresia (23.3) trebuie să i se adauge termeni de forma $(W_p)_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \dots, N, i \neq k$), care reprezintă energiile potențiale de interacțiune dintre particule. Totodată, putem considera că fiecare particulă este supusă unei interacțiuni medii din partea celorlalte, astfel că energia potențială medie nu depinde de poziția celorlalte particule față de cea considerată. În acest caz formula (23.3) rămâne valabilă cu condiția că $W_i = W_{ci} + W_{pi}$, unde W_{ci} , W_{pi} reprezintă energia cinetică, respectiv energia potențială a particulei.

Ca urmare a interacțiunilor și a ciocnirilor energia particulelor variază, ceea ce determină o modificare în timp a distribuției energetice (23.1), considerată inițială. Această modificare este explicată în următorul *prim postulat al fizicii statistice*: un sistem izolat de particule cu energia totală, structura particulelor și numărul de particule constante în timp, evoluează în timp către distribuția cea mai probabilă a particulelor după energii. Când în sistem se instalează această distribuție se spune că el se află în starea de *echilibru statistic* (numit și echilibru termodinamic). Deci starea de echilibru statistic corespunde distribuției cu probabilitatea maximă. Noțiunea de probabilitate de distribuție P , folosită în acest postulat, nu are sensul unei probabilități matematice cu valori cuprinse între zero și unu. *Probabilitatea de distribuție*, numită și *probabilitate sau pondere termodinamică*, exprimă numărul de moduri distincte în care se poate realiza o distribuție dată a unui sistem, compus dintr-un număr mare de particule. Dacă particulele sistemului sunt identice, atunci permutarea lor între diferite nivele de energie conduce la moduri distincte de distribuție, iar permutarea lor în cadrul aceleiași stări nu conduce la un nou mod de distribuție. Putem defini probabilitatea de distribuție și astfel: ea reprezintă numărul de stări microscopice distincte, compatibile cu o stare macroscopică dată. Cu cât probabilitatea de distribuție este mai

mare cu atât este mai probabilă realizarea stării macroscopice respective.

În calitate de exemplu, pe fig.4.2, este ilustrat cazul simplu, în care se consideră un sistem format din patru particule identice, discernabile, notate 1, 2, 3, 4. Aceste particule se pot afla pe două nivele energetice W_1 și W_2 . Vom folosi acest exemplu pentru a ne convinge de justetea următoarei formule de calcul a numărului total de moduri distincte, în care se pot distribui N particule dintr-un sistem pe m nivele energetice, adică a probabilității de distribuție

$$P = \frac{N!}{N_1!N_2!...N_m!} \quad (23.4)$$

În această formulă $N!$ reprezintă numărul total de distribuții ale particulelor, determinat de permutările lor atât în cadrul fiecărui nivel energetic cât și între diferite nivele. Numerele $N_1, N_2, ..., N_m$ reprezintă numărul de particule pe nivelul energetic cu același indice, iar $N_1!, N_2!, ..., N_m!$ - numărul de distribuții posibile ale particulelor pe nivelul respectiv, determinate de permutările particulelor în cadrul acestui nivel. Produsul $N_1!N_2!...N_m!$ este egal cu numărul de distribuții a N particule pe m nivele energetice, determinat de permutările lor numai în cadrul fiecărui nivel. Menționăm că la scrierea formulei (23.4) s-a considerat că fiecare nivel energetic este la fel de „accesibil” pentru fiecare particulă, adică toate nivelele au aceeași probabilitate de a fi ocupate.

În cazurile a, a' (fig.4.2) pe unul din nivele sunt situate toate patru particule. Permutările lor între nivele nu au loc, deci există un singur mod distinct de distribuție a particulelor. Evident, în afară de distribuția 1,2,3,4 de pe figură mai sunt posibile $4! = 24$ moduri de distribuție, cum ar fi 2,1,3,4; 3,1,2,4; 4,1,2,3 etc., care nu sunt distincte și corespund unei singure microstări. Prin urmare, probabilitatea de distribuție $P_a = 1$.

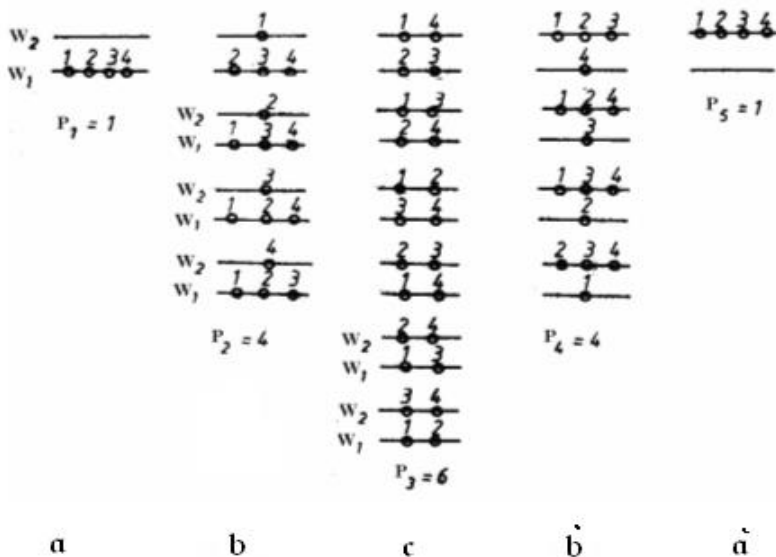


Fig.4.2

Același rezultat urmează și din formula (23.4). În cazurile b, b' pe unul din nivele este situată o singură particulă, oricare din cele patru. Prin urmare sunt posibile patru permutări ale particulelor de pe un nivel pe altul. Conform definiției probabilității de distribuție numai astfel de permutări duc la apariția unei noi microstări. În concluzie, $P_b = 4$. Formula (23.4) ne conduce la același rezultat

$$P_b = \frac{4!}{1!3!} = 4.$$

Dacă particulele sunt distribuite câte două pe fiecare nivel (cazul c fig.4.2), atunci sunt posibile șase microstări distincte, rezultate din permutările particulelor de pe un nivel pe altul $P_c = 6$. În cadrul fiecărui nivel sunt posibile permutări care nu modifică microstarea. Din formula (23.4) obținem același rezultat

$$P_c = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Constatăm, că probabilitatea de distribuție are valoare maximă anume în cazul când particulele sunt distribuite uniform pe nivelele energetice, caracterizate de aceeași probabilitate de a fi ocupate.

În general, trebuie să admitem situația, când nu toate nivelele au aceeași probabilitate de a fi ocupate, deoarece nivelele energetice pot fi degenerate. Noțiunea de degenerare a nivelelor energetice, utilizată în temei în fizica cuantică, a fost introdusă în cursul preuniversitar pentru a defini stările electronilor din atomi. De exemplu, s-a constatat că pentru o valoare a numărului cuantic principal n , ce cuantifică energia electronului, există n valori ale numărului cuantic orbital l , ce cuantifică valoarea momentului cinetic (momentului impulsului) al electronului

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar,$$

unde $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, iar $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h este constanta lui Planck.

Prin urmare, pe unul și același nivel energetic electronul se poate afla în n stări, ce diferă prin valorile momentului cinetic orbital. Dacă unui nivel energetic îi corespund mai multe stări distincte ale particulei, atunci acest nivel este numit degenerat, iar stările cu aceeași energie ale particulei sunt numite degenerate. Ordinul (gradul) de degenerare g al unui nivel energetic este egal cu numărul de stări distincte ale particulei aflate pe acest nivel. Ne exprimăm astfel: nivelul energetic este compatibil cu g stări distincte ale particulei.

Dacă se notează cu g_i numărul de stări diferite, compatibile cu energia W_i , atunci se spune că nivelul energetic W_i prezintă o degenerare de ordinul g_i . Numărul total de stări distincte în care se poate afla o particulă pe m nivele energetice este egal cu $\sum_{i=1}^m g_i$.

Admitem că pe nivelele energetice doi ($n = 2$) și trei ($n = 3$) ale electronilor din atom sunt distribuiți câte doi electroni. Să

determinăm numărul de moduri, distincte prin valorile momentelor cinetice ale celor doi electroni, compatibile cu fiecare nivel energetic. Valorile momentelor cinetice se vor calcula conform formulei de mai sus, în care numărul cuantic orbital are valorile 0 și 1 pentru nivelul doi și 0, 1 și 2 pentru nivelul trei.

Nivelul energetic	Valorile momentului cinetic	
	Particula unu	Particula doi
$n = 2$ $l = 0, 1.$	0	0
	0	$\sqrt{2} \hbar$
	$\sqrt{2} \hbar$	0
	$\sqrt{2} \hbar$	$\sqrt{2} \hbar$
$n = 3$ $l = 0, 1, 2.$	0	0
	0	$\sqrt{2} \hbar$
	0	$\sqrt{6} \hbar$
	$\sqrt{2} \hbar$	0
	$\sqrt{2} \hbar$	$\sqrt{2} \hbar$
	$\sqrt{2} \hbar$	$\sqrt{6} \hbar$
	$\sqrt{6} \hbar$	0
	$\sqrt{6} \hbar$	$\sqrt{2} \hbar$
	$\sqrt{6} \hbar$	$\sqrt{6} \hbar$

Un electron de pe nivelul doi are două stări ce se deosebesc prin valorile momentului cinetic orbital, deci ordinul de degenerare a acestui nivel este $g_2 = 2$. Numărul de moduri distincte în care se pot distribui cei doi electroni de pe acest nivel datorită degenerării este $2^2 = 4$. Un electron de pe nivelul trei are trei stări distincte prin valorile momentului cinetic orbital, adică ordinul de

degenerare a acestui nivel este $g_3 = 3$. Numărul de moduri distincte, în care se pot distribui cei doi electroni de pe acest nivel datorită degenerării lui este $3^2 = 9$. În general, dacă pe nivelul energetic W_i cu ordinul de degenerare g_i se distribuie N_i particule, atunci numărul de moduri distincte de distribuție, datorate degenerării nivelului este egal cu $(g_i)^{N_i}$. Pentru distribuția după energii dată de formula (23.1) considerăm că ordinele de degenerare ale nivelelor energetice respective sunt g_1, g_2, \dots, g_m . Atunci numărul suplimentar de moduri distincte în care se distribuie particulele sistemului datorită degenerării nivelelor energetice este egal cu produsul:

$$(g_1)^{N_1} (g_2)^{N_2} (g_3)^{N_3} \dots (g_m)^{N_m}.$$

Luându-se în vedere acest rezultat, formula (23.4) devine:

$$P = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!} (g_1)^{N_1} (g_2)^{N_2} \dots (g_m)^{N_m}. \quad (23.5)$$

Formula (23.5) permite calculul numărului total de moduri distincte în care se pot distribui particulele sistemului pe m nivele degenerate de energie pentru a realiza distribuția (23.1), adică calculul probabilității de distribuție P . Dacă nivelele de energie nu sunt degenerate, atunci toate numerele g_i au valoarea 1 și formula (23.5) trece în (23.4).

23.2. Legea de distribuție Maxwell – Boltzmann

Una din problemele fundamentale ale fizicii statistice constă în determinarea distribuției celei mai probabile pe nivele energetice a particulelor unui sistem macroscopic izolat, adică a distribuției ce corespunde stării sale de echilibru statistic. În această stare sistemul rămâne atât timp, cât nu intervin cauze externe, care să-i modifice distribuția. Prin echilibru statistic trebuie să se înțeleagă echilibru dinamic, în următorul sens: numerele N_1, N_2, \dots, N_m , pot fluctua în jurul valorilor corespunzătoare distribuției celei mai probabile, fără ca prin

aceasta să se producă efecte, observabile din punct de vedere macroscopic.

Vom enunța raționamentele principale care permit deducerea distribuției celei mai probabile pentru un sistem omogen, izolat. Conform postulatului, referitor la starea de echilibru statistic (formulat în § 23.1), pentru a determina distribuția particulelor sistemului aflat în această stare trebuie să impunem condiția de maxim pentru probabilitatea de distribuție (23.5),

$$\delta P = 0. \quad (23.6)$$

Din punct de vedere fizic este echivalent, iar din punct de vedere matematic este mai simplu de a aplica condiția de maxim nu probabilității P dată de (23.5) dar expresiei (23.5) logaritmata, adică

$$\delta(\ln P) = 0. \quad (23.7)$$

Maximul probabilității trebuie calculat, respectând condițiile de conservare (23.2), (23.3). Se logaritmează expresia (23.5), rezultatul obținut se diferențiază conform condiției (23.7) și se ține cont de faptul că N, g_i, W sunt mărimi constante, adică

$$\delta N = \sum_{i=1}^m \delta N_i = 0, \quad \delta g_i = 0, \quad \delta W = \sum_{i=1}^N W_i \delta N_i = 0. \quad (23.8)$$

În rezultat, după transformări matematice se obține relația, numită legea de distribuție Boltzmann

$$N_i = g_i \exp(-\alpha) \exp(-\beta W_i). \quad (23.9)$$

Relația (23.9) exprimă dependența numărului de particule de pe un nivel energetic de energia acestui nivel W_i , atunci când sistemul de particule este în echilibru statistic. Mărimile α și β reprezintă o constantă arbitrară, respectiv o constantă pozitivă, ambele fiind mărimi caracteristice ale sistemului în echilibru. Introducerea acestor constante este impusă de respectarea condițiilor (23.8). Se substituie relația (23.9) în legea conservării numărului de particule (23.2). Rezultă

$$N = \exp(-\alpha) \sum_{i=1}^m g_i \exp(-\beta W_i).$$

Se notează

$$z = \sum_{i=1}^m g_i \exp(-\beta W_i). \quad (23.10)$$

Atunci din relația precedentă obținem

$$\exp(-\alpha) = \frac{N}{z}. \quad (23.11)$$

Relația (23.11) exprimă constanta α în funcție de numărul de particule din sistem și constanta β . Substituind relația (23.11) în legea de distribuție (23.9), obținem o nouă expresie pentru legea de distribuție Boltzmann

$$N_i = \frac{N}{z} g_i \exp(-\beta W_i). \quad (23.12)$$

Mărimea z , definită prin egalitatea (23.10) este numită sumă statistică. În cazul unei distribuții continue a particulelor după energii mărimea z se numește integrală statistică și definiția (23.10) se înlocuiește prin integrala

$$z = \int_0^{\infty} g(W) \exp(-\beta W) dW, \quad (23.13)$$

în care $g(W)dW$ reprezintă numărul de stări în care se poate afla o particulă, energia căreia este cuprinsă în intervalul de la W la $W + dW$. Distribuția continuă a particulelor după energii, numită lege de distribuție Maxwell–Boltzmann, se scrie

$$dN = \frac{N}{z} g(W) \exp(-\beta W) dW. \quad (23.14)$$

În legea (23.14) dN reprezintă numărul de particule cu energia cuprinsă în intervalul de la W la $W + dW$, dacă sistemul considerat se află în starea de echilibru statistic.

În cazul spectrului energetic continuu se definește *funcția $f(W)$ de distribuție a particulelor după energii*

$$f(W)dW = \frac{dN}{N}, \quad f(W) = \frac{dN}{NdW}. \quad (23.15)$$

Conform relațiilor (23.15) numărul relativ de particule ce posedă energii cuprinse în intervalul de la W la $W + dW$ este proporțional cu acest interval și depinde de valoarea energiei prin intermediul funcției $f(W)$. Totodată, raportul $\frac{dN}{N}$ reprezintă probabilitatea matematică că energia unei molecule oarecare are valoarea din intervalul indicat. Prin urmare, integrala

$$\int_0^{\infty} f(W) dW = 1 \quad (23.16)$$

reprezintă probabilitatea că o moleculă oarecare are energia din intervalul de la 0 la ∞ . Evident, această probabilitate este egală cu unitatea, iar egalitatea (23.16) este numită condiție de normare. În baza distribuției (23.14) obținem funcția de distribuție după energii a particulelor unui sistem izolat în echilibru statistic

$$f(W) = \frac{1}{Z} g(W) \exp(-\beta W). \quad (23.17)$$

Din expresiile (23.14)-(23.17) urmează că legile și funcția de distribuție $f(W)$ sunt complet determinate dacă se dă o semnificație fizică și se determină constantele α și β . Totodată, prin relațiile (23.10), (23.11) constanta α a fost exprimată prin β , care are unitatea de măsură energetică, (J^{-1}). S-a convenit să se introducă o nouă mărime în locul lui β , notată prin T și numită temperatură absolută a sistemului

$$\frac{1}{\beta} = kT. \quad (23.18)$$

Alegând un Kelvin ca unitate de măsură pentru T (această unitate de măsură a fost introdusă înaintea apariției fizicii statistice), valoarea lui k , numită constanta Boltzmann, este cunoscută, $k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. Se demonstrează că temperatura absolută, definită prin egalitatea (23.18), coincide cu temperatura măsurată experimental, de exemplu cu un termometru cu gaz. În

legătură cu definiția (23.18) este important să accentuăm, că ea se referă la sisteme în echilibru statistic și deci nu se aplică la o singură particulă sau la un sistem în neechilibru.

23.3. Distribuția moleculelor gazului ideal după energii și după viteze

În calitate de exemplu de aplicare a rezultatelor descrise în §§ 23.1, 23.2 vom considera un sistem cu volumul V , izolat, constituit din N molecule de gaz ideal. Presupunem că energia cinetică a moleculelor este numai de translație și are un spectru continuu de valori, cuprinse între zero și infinit.

Determinarea legii de distribuție necesită calculul integralei statistice (23.13) - mărime fundamentală în fizica statistică, expresia concretă a căreia depinde de structura internă a sistemului considerat. Deoarece expresia (23.5) pentru probabilitatea de distribuție a fost obținută în cazul general al unor nivele energetice degenerate, această integrală se calculează utilizând noțiuni și legi din fizica cuantică. Vom prezenta doar rezultatul final pentru ea și pentru produsul $g(W)dW$

$$Z = \frac{V(2\pi m_0 kT)^{3/2}}{h^3}, \quad g(W)dW = \frac{4\pi V}{h^3} (2m_0)^{1/2} W^{1/2} dW,$$

unde m_0 este masa unei molecule, iar h este constanta lui Planck. Atunci *legea de distribuție după energii a moleculelor gazului ideal* este

$$dN = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} W^{1/2} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW, \quad (23.19)$$

iar *funcția de distribuție* se scrie

$$f(W) = \frac{dN}{NdW} = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} W^{1/2} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right). \quad (23.20)$$

Se verifică că această funcție respectă condiția de normare (23.16). Funcția de distribuție $f(W)$ se reprezintă grafic printr-o curbă asimetrică cu un maxim pentru o valoare a energiei

W_p , numită *energia cea mai probabilă* (fig.4.3a). Se poate calcula W_p , impunând condiția de maxim pentru $f(W)$

$$\frac{df(W)}{dW} = 0, \quad W_p = \frac{1}{2} kT. \quad (23.21)$$

Se va vedea (§24) , că această valoare coincide cu valoarea energiei pe grad de libertate, obținută din legea echipartiției energiei pe grade de libertate. Din fig.4.3a se observă că valoarea minimă a energiei este egală cu zero, iar o limită maximă a energiei, în principiu, nu există. Totodată, probabilitatea ca moleculele să aibă energii mult mai mari decât kT este foarte mică. Aria hașurată din aceeași figură reprezintă numărul relativ de molecule $\frac{dN}{N} = f(W)dW$ care au energia cuprinsă în intervalul de la W la $W + dW$. Numărul relativ de molecule cu energia dintr-un interval finit $[W_1, W_2]$ se determină calculând

integrala $\int_{W_1}^{W_2} f(W)dW$.

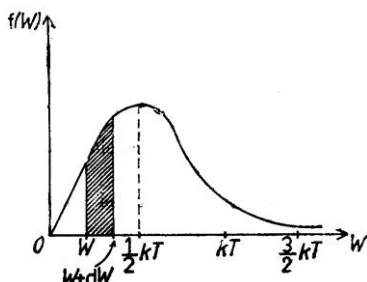


Fig.4.3a

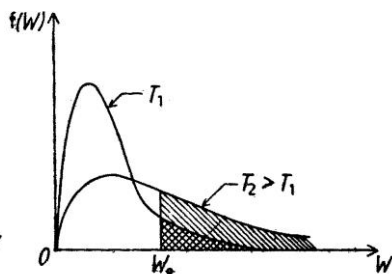


Fig.4.3b

Există metode experimentale indirecte prin care a fost verificată legea de distribuție (23.19). Una din ele se bazează pe rezultatele privind viteza de desfășurare a reacțiilor chimice. Experimental se constată, că anumite reacții chimice se realizează numai dacă moleculele care reacționează au o energie ce depășește

o anumită valoare de prag W_0 , caracteristică acestora. Cu cât numărul de molecule, a căror energie depășește W_0 este mai mare, cu atât și viteza reacției este mai mare. Analizând reprezentările grafice ale $f(W)$ la două temperaturi diferite T_1 și $T_2 > T_1$ se observă că numărul de molecule cu energia $W > W_0$ crește odată cu temperatura (fig.4,3b). Se calculează numărul suplimentar de molecule cu energia $W > W_0$ apărut la creșterea temperaturii gazului de la T_1 la T_2 . Pe de altă parte, se determină experimental vitezele de reacție la cele două temperaturi. Se constată că viteza de reacție crește în același raport în care crește numărul de molecule cu energia $W > W_0$ atunci când se trece de la T_1 la T_2 . Acest rezultat constituie o confirmare experimentală a legii de distribuție a moleculelor gazului ideal după energii.

Legea de distribuție a moleculelor unui gaz ideal după viteze, determinată de către Maxwell, permite calculul numărului de molecule cu valorile vitezei cuprinse în intervalul de la v la $v + dv$ oricare ar fi poziția moleculelor în volumul V ocupat de gaz. Această lege se poate obține, pornind de la distribuția (23.19),

în care se substituie $W = \frac{1}{2}m_0v^2$, $dW = m_0v dv$. Atunci rezultă ,

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv. \quad (23.22)$$

Definind *funcția de distribuție a moleculelor gazului ideal după viteze* $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$, obținem,

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right). \quad (23.23)$$

Această funcție (fig.4.4) are un maxim pentru valoarea v_p a vitezei, numită *viteza cea mai probabilă a moleculelor*. Pentru a o calcula se impune condiția de maxim funcției $f(v)$:

$$\frac{df(v)}{dv} = 0.$$

Efectuând calculele și excluzând valorile $v=0$, $v=\infty$, care corespund minimului funcției $f(v)$, rezultă

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (23.24)$$

De exemplu, pentru oxigenul aflat la temperatura $T=300\text{ K}$ viteza cea mai probabilă are valoarea $v_p = 3,9 \cdot 10^2 \text{ m/s}$.

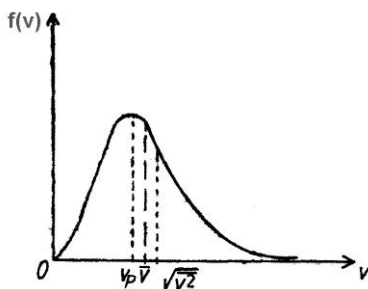


Fig.4.4

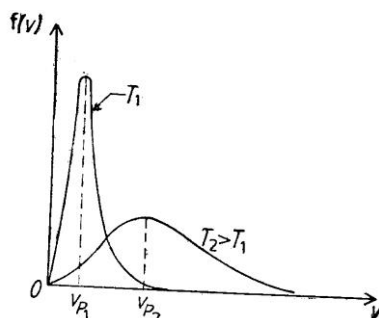


Fig.4.5

Fiind cunoscută funcția de distribuție (23.23) se mai pot calcula *viteza medie* \bar{v} a moleculelor gazului ideal și viteza pătratică medie, denumită și *viteză termică* a moleculelor $\left(\sqrt{\overline{v^2}} = v_{pat}\right)$. Aceste calcule sunt posibile deoarece, conform

celui de-al doilea postulat fundamental al fizicii statistice, se afirmă: valorile observabile experimental pentru mărimile fizice, ce caracterizează un sistem macroscopic, reprezintă valoarea medie a acestei mărimi, luată după toate microstările compatibile cu macrostarea considerată. În consecință, cunoscând funcția de

distribuție $f(y)$, valoarea medie a mărimii $x(y)$ se calculează conform formulei

$$\bar{x} = \int x(y)f(y)dy, \quad (23.25)$$

integrala fiind calculată pe întregul domeniu de valori posibile pentru variabila y . În baza egalității (23.25) viteza medie a moleculelor unui gaz ideal este dată de expresia

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (23.26)$$

Substituind în această egalitate funcția (23.23), obținem

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv. \quad (23.27)$$

Pentru calculul unei astfel de integrale se folosește formula

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-ax^2) dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(2a)^{n/2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(2a)^{n/2} (2a)^{(n+1)/2}}, n = 3, 5, 7, \dots \end{cases}, \quad (23.28)$$

unde a este o constantă pozitivă arbitrară. Pentru $n = 3$ și $a = \frac{m_0}{2kT}$ obținem ,

$$\int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv = 2 \left(\frac{kT}{m_0} \right)^2.$$

Se substituie acest rezultat în (23.27). Rezultă,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1,13 v_p. \quad (23.29)$$

Cu ajutorul aceleiași formule (23.25) se calculează $\overline{v^2}$ și apoi viteza termică (pătratică medie) v_{pat} ,

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv.$$

Pentru $n = 4$ și $a = \frac{m_0}{2kT}$ din formula (23.28) obținem

$$\int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv = \frac{3}{2} \left(\frac{kT}{m_0} \right)^2,$$

$$v_{pat} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,224 v_p. \quad (23.30)$$

Din valorile obținute (23.29) și (23.30) rezultă $v_p < \overline{v} < v_{pat}$.

Totodată $v_p, \overline{v}, v_{pat}$ cresc proporțional cu \sqrt{T} și deci maximumul funcției $f(v)$ se deplasează spre viteze mai mari atunci când temperatura crește (fig.4.5). Prin urmare, numărul de molecule cu viteză mică scade, iar al celor cu viteză mare crește odată cu temperatura. Totodată, aria limitată de curba $f(v)$ și axa vitezei rămâne constantă în baza condiției de normare (23.16).

Primele determinări experimentale ale vitezelor moleculelor și verificarea experimentală a legii de distribuție (23.22) au fost efectuate de către O. Stern (an.1920), folosindu-se fascicule moleculare. Ulterior metoda propusă de O. Stern a fost aplicată de mai mulți savanți cu scopul determinării distribuției atomilor sau a moleculelor după viteze. Descrierile experiențelor lui Stern pot fi găsite în manualele de fizică, inclusiv cel liceal. Menționăm, că s-a obținut o bună concordanță a rezultatelor experimentale cu legea de distribuție Maxwell (23.22). Justificarea legii (23.22) rezultă și din faptul că ea permite o deducere strictă a legii de bază a teoriei cinetico-moleculare (22.6) pentru gazul ideal, de asemenea confirmată experimental.

23.4. Distribuția Boltzmann a moleculelor gazului ideal după energii într-un câmp extern de forțe conservative.

Formula barometrică

În absența forțelor externe densitatea ρ și concentrația n a moleculelor de gaz în echilibru sunt peste tot aceleași, moleculele fiind uniform distribuite în volumul recipientului. În realitate, asupra moleculelor gazului acționează, cel puțin, câmpul gravitațional al Pământului, ceea ce generează o variație a concentrației, deci și a presiunii gazului cu înălțimea. Pentru a stabili legea distribuției moleculelor unui gaz ideal, aflat sub acțiunea unui câmp extern de forțe conservative, vom considera legea de distribuție Maxwell-Boltzmann (23.19), în care se substituie energia totală W a moleculei de masă m_0

$W = \frac{m_0 v^2}{2} + W_p$, unde W_p este energia potențială în câmpul indicat, cât și egalitățile $N = nV, dN = Vdn$. Se obține expresia

$$dn = 4\pi n_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{W_p + \frac{m_0 v^2}{2}}{kT} \right) v^2 dv, \quad (23.31)$$

în care n_0 este numărul de molecule din unitatea de volum pentru care $W_p = 0$. Relația (23.31) se integrează în limitele variației vitezei de la zero la infinit, folosindu-se formula (23.28). Rezultă

$$\begin{aligned} n &= 4\pi n_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{W_p}{kT} \right) \int_0^\infty v^2 \exp \left(- \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv = \\ &= 4\pi n_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{W_p}{kT} \right) \cdot \frac{kT}{m_0} \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi kT}{m_0} \right)^{1/2} = n_0 \exp \left(- \frac{W_p}{kT} \right), \\ n &= n_0 \exp \left(- \frac{W_p}{kT} \right). \end{aligned} \quad (23.32)$$

Relația (23.32) se numește *distribuția Boltzmann a moleculelor gazului ideal după energiei potențiale într-un câmp extern de forțe conservative*. Conform acestei distribuții concentrația moleculelor descrește exponențial odată cu creșterea energiei lor potențiale. Moleculele gazului ideal se distribuie conform (23.32) în orice câmp potențial extern. În cazul particular al câmpului gravitațional omogen ($g = \text{const}$) distribuția (23.32) se scrie

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{Mg z}{RT}\right), \quad (23.33)$$

unde z este înălțimea față de nivelul nul al energiei potențiale, la care se determină concentrația n , iar n_0 este concentrația la acest nivel nul, coordonata căruia este $z_0 = 0$.

Aplicăm distribuția (23.33) atmosferei terestre, care în condiții obișnuite se poate considera gaz ideal. Ajungem la concluzia că concentrația aerului descrește exponențial cu înălțimea. Descreșterea este mai rapidă pentru componentele aerului cu mase moleculare mari. La deducerea formulelor (23.32), (23.33) s-a considerat că temperatura este constantă. Prin urmare, valoarea concentrației aerului calculată conform (23.33) este aproximativă, deoarece temperatura atmosferică scade cu înălțimea. Din formula (23.33) rezultă că $n \rightarrow n_0$, dacă $T \rightarrow \infty$, adică creșterea temperaturii, deci și a energiei cinetice medii a moleculelor, valoarea căreia devine $W_c \gg W_p$, ar conduce la egalarea concentrației gazului în întreg spațiul accesibil. La $T \rightarrow 0$ obținem $n \rightarrow 0$, adică la încetarea mișcării termice a moleculelor, când energia lor cinetică tinde spre zero, moleculele s-ar depune pe suprafața terestră. Astfel, menținerea atmosferei terestre se datorează mișcării termice a moleculelor, asupra cărora acționează forța gravitațională.

În formula (23.33) se substituie $p = nkT$, $p_0 = n_0 kT$.
Rezultă

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right). \quad (23.34)$$

Am obținut relația, numită *formula barometrică*. Dacă se cunosc presiunea p_0 la $z_0 = 0$ și p la înălțimea z , din (23.34) se poate calcula această înălțime

$$z = \frac{kT}{m_0 g} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Formulele (23.33), (23.34) se pot deduce, neutilizând distribuția Maxwell – Boltzmann. Se scrie condiția de echilibru pentru un strat de aer de înălțime dz și arie s (fig 4.6)

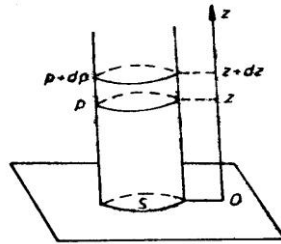


Fig.4.6

$$s[p - (p + dp)] = s\rho g dz,$$

unde p și $p + dp$ reprezintă presiunea atmosferică la înălțimea z , respectiv $z + dz$, iar ρ este densitatea aerului din stratul considerat. Urmează

$$dp = -\rho g dz.$$

Din ecuația de stare a gazului ideal se determină ρ ,

$$\rho = \frac{Mp}{RT} = \frac{m_0 p}{kT},$$

(m_0 este masa unei molecule) și se substituie în egalitatea precedentă

$$dp = -\frac{m_0 g p}{kT} dz, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} dz.$$

Considerând $T = \text{const}$, $g = \text{const}$, se integrează ultima egalitate în limitele p_0, p și respectiv $0, z$. Se obține formula barometrică (23.34).

Această a doua deducere a formulei (23.34) poate fi considerată ca o confirmare a justității uneia din cele mai importante legi a fizicii statistice clasice – distribuția Maxwell-Boltzmann.

§ 24. Legea echipartiției energiei cinetice medii după grade de libertate

În §22 am obținut expresia pentru energia cinetică medie de translație a unei molecule de gaz ideal

$$\overline{W_{tr}} = \frac{1}{2} m_0 v_{pat}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (24.1)$$

Concomitent cu mișcarea de translație moleculele formate din doi și mai mulți atomi pot efectua mișcări de rotație, iar atomii constituenți – și mișcări oscilatorii. Energia medie ce revine acestor mișcări se determină în baza legii statistice a echipartiției energiei cinetice medii după grade de libertate. În acest paragraf vom formula și aplica această lege pentru moleculele mono-, bi- și poliatomice de gaz, pentru care vom adopta anumite modele. Definim, în prealabil, noțiunea de *grad de libertate*: numărul de grade de libertate ale unui corp este numărul de coordonate independente, necesare pentru a determina univoc poziția corpului în spațiu.

a) Molecule monoatomice. Masa moleculei monoatomice este concentrată practic în totalitate în nucleul atomic, dimensiunile căruia ($\approx 10^{-15} m$) sunt neglijabil de mici. Molecula monoatomică se consideră un punct material în mișcare de translație și poziția lui este complet determinată de trei coordonate - x, y, z . Deci o astfel de moleculă are trei grade de libertate și energia cinetică medie determinată de formula (24.1), în care vom substitui expresia (22.5) pentru viteza termică v_T . Obținem

$$\overline{W_{tr}} = \frac{m_0}{2N} \sum_{k=1}^N v_k^2.$$

Datorită haotismului mișcării termice a moleculelor de gaz toate direcțiile sunt la fel de probabile și valorile medii ale celor trei termeni din partea dreaptă a egalității

$$v_k^2 = v_{kx}^2 + v_{ky}^2 + v_{kz}^2, \quad (24.2)$$

sunt egale între ele. Prin urmare, luând în calitate de exemplu axa x putem scrie

$$\sum_{k=1}^N v_{kx}^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N v_k^2, \quad \overline{W_{trx}} = \frac{1}{3} \overline{W_{tr}}. \quad (24.3)$$

Astfel, din considerațiile generale ale teoriei cinetico-moleculare se ajunge la concluzia că fiecărui grad de libertate al mișcării de translație a moleculei îi revine una și aceeași valoare medie a energiei cinetice, care se obține substituind a doua egalitate din (24.1) în expresia (24.3)

$$\overline{W_{trx}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{kT}{2}. \quad (24.4)$$

Deducerea strictă a relației (24.4) se bazează pe funcția de distribuție Maxwell după viteze, descompusă după componentele vitezei

$$f(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT} \right). \quad (24.5)$$

Funcțiile de distribuție după componentele v_y și v_z au același aspect ca și (24.5), doar că indicele vitezei devine y , respectiv z . În continuare, folosind (24.5) și definiția (23.25) se calculează valorile medii ale energiei de translație în lungul fiecărei axe.

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \overline{v_x^2}}{2} &= \frac{m_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{m_0}{2} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \exp \left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT} \right) dv_x = \\ &= m_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x^2 \exp \left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT} \right) dv_x = \end{aligned}$$

$$= m_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{-3/2} = \frac{kT}{2}.$$

Calculul integralei s-a bazat pe formula (23.28). În mod analog se obțin egalitățile

$$\frac{m_0 \overline{v_y^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \quad \frac{m_0 \overline{v_z^2}}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Astfel, am dedus *legea echipartiției energiei cinetice medii pe cele trei grade de libertate ale mișcării de translație*, fiecărui grad revenindu-i energia egală cu $\frac{kT}{2}$.

b) Molecule bi- și poliatomice. Într-o primă aproximație molecula biatomică reprezintă două puncte materiale legate rigid la o anumită distanță unul de altul (fig 4.7). În afară de trei grade de libertate ale mișcării de translație ea posedă încă două grade de libertate ale mișcărilor de rotație în jurul axelor $O_1 - O_1$ și $O_2 - O_2$. Momentul de inerție neglijabil de mic față de axa $O^1 - O^1$ anulează energia cinetică a rotației moleculei în raport cu această axă.

Moleculele poliatomice se consideră, în primă aproximație, formate din trei și mai mulți atomi legați rigid între ei (fig 4.8) și posedă trei grade de libertate ale mișcării de translație și trei grade de libertate ale mișcării de rotație în raport cu axele indicate pe figură.

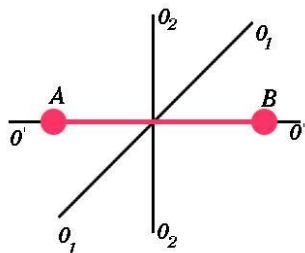


Fig.4.7

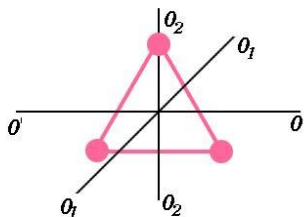


Fig.4.8

În cadrul fizicii statistice clasice se deduce *legea echipartiției energiei după gradele de libertate de translație sau rotație ale moleculei*. Legea susnumită se formulează astfel: fiecărui grad de libertate al moleculei îi revine aceeași energie cinetică medie, egală cu $\frac{kT}{2}$. Prin urmare, energia cinetică medie

a moleculei cu i grade de libertate este

$$\overline{W_c} = \frac{i}{2} kT. \quad (24.6)$$

În cadrul modelelor adoptate energiile cinetice medii ale moleculelor sunt următoarele :

pentru gaze monoatomice $i = 3$, $\overline{W_c} = \frac{3}{2} kT$,

pentru gaze biatomice $i = 5$, $\overline{W_c} = \frac{5}{2} kT$,

pentru gaze poliatomice $i = 6$, $\overline{W_c} = \frac{6}{2} kT$.

Modelele moleculelor, formate din atomi legați rigid între ei, sunt simplificate. Atomii moleculelor nu sunt legați rigid, dar efectuează mișcări oscilatorii, distanța dintre ei variază. Calculând energia cinetică medie a unei molecule, trebuie luate în considerație și gradele de libertate oscilatorii: molecula biatomică are un grad de libertate oscilatoriu, iar molecula triatomică are trei grade de libertate oscilatorii. Energia unei oscilații mecanice este egală cu suma dintre energiile cinetică și potențială. Valorile medii ale acestor energii sunt egale între ele și fiecare este egală cu $\frac{kT}{2}$. Prin urmare, unui grad de libertate oscilatoriu îi revine

energia medie egală cu kT , adică de două ori mai mare decât energia ce revine unui grad de libertate al mișcării de translație sau rotație.

Este important de menționat că deducerea legii echipartiției în cadrul fizicii statistice cuantice conduce la următoarele concluzii. Energia cinetică medie ce revine unui grad de libertate

al mișcării de rotație este egală cu $\frac{kT}{2}$ dacă se respectă condiția că $T \gg \theta_r$, unde θ_r este numită temperatură caracteristică de rotație și este o constantă pentru substanța dată. Pentru majoritatea gazelor valorile acestei temperaturi sunt cu mult mai mici decât temperatura normală. Prin urmare, la temperaturi comparabile cu cea normală trebuie să se țină cont de mișcarea de rotație a moleculelor și de energia medie ce îi revine. Energia cinetică medie ce revine unui grad de libertate oscilatoriu este egală cu kT , atunci când temperatura gazului $T \gg \theta_\mu$. Mărimea θ_v este o temperatură specifică fiecărei substanțe, numită temperatură caracteristică de vibrație. Pentru majoritatea gazelor valorile θ_v sunt mai mari decât cea normală. În rezultat, mișcarea oscilatorie trebuie luată în considerație numai la temperaturi mult mai mari față de cea normală.

§25. Parcurs liber mediu al moleculelor

Moleculele oricărei substanțe reprezintă sisteme complexe, între care se exercită forțe intermoleculare, caracterul și valoarea cărora depinde de distanța dintre molecule. Distanța minimă, la care se apropie centrele a două molecule poate fi determinată pe baza legii conservării energiei. Această distanță, numită *diametru eficace al moleculei*, depinde de energia medie a sistemului, format din două molecule în interacțiune, prin urmare depinde de temperatură. Evident, diametrul eficace depinde și de natura chimică a moleculelor gazului.

În teoria cinetico-moleculară se introduce noțiunea de parcurs liber mediu-caracteristică statistică a sistemului considerat, aflat în stare de echilibru. *Parcursul liber mediu al moleculelor de gaz* este distanța medie parcursă de o moleculă între două ciocniri succesive. Parcursul liber mediu $\bar{\lambda}$ al moleculelor gazului ideal omogen satisface relația

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{\gamma}}, \quad (25.1)$$

unde \bar{v} este viteza medie a moleculelor gazului, iar $\bar{\gamma}$ este numărul mediu de ciocniri ale unei molecule în unitatea de timp. Pentru simplitatea calculelor mărimilor $\bar{\gamma}$ și $\bar{\lambda}$ vom presupune că toate moleculele, în afară de cea considerată, sunt imobile. Ciocnirea moleculei mobile de o moleculă imobilă se produce, dacă centrul moleculei imobile se află, în raport cu dreapta în lungul căreia se deplasează molecula mobilă, la o distanță mai mică sau egală cu diametrul eficace d . În rezultatul ciocnirii molecula mobilă își schimbă direcția de mișcare și se deplasează rectiliniu și uniform până la o nouă ciocnire. Evident, molecula mobilă va ciocni în unitatea de timp toate moleculele imobile ce au centrele în interiorul cilindrului cu cotituri de lungime totală \bar{v} și cu secțiunea πd^2 (fig.4.9).

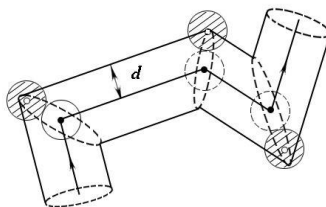


Fig.4.9

Dacă n este concentrația moleculelor, iar V este volumul cilindrului cu cotituri, atunci numărul mediu de ciocniri în unitatea de timp ale moleculei mobile este:

$$\bar{\gamma}' = nV = \pi d^2 n \bar{v}.$$

În realitate toate moleculele se mișcă și, ca urmare, numărul de ciocniri este determinat de viteza medie relativă a moleculelor v_{rel} ,

$$v_{rel} = \sqrt{2} \bar{v}.$$

Numărul mediu de ciocniri ale unei molecule în unitatea de timp este

$$\bar{\gamma} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n . \quad (25.2)$$

Substituind această egalitate în (25.1) obținem parcursul liber mediu,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} . \quad (25.3)$$

Luând în considerație că $n = \frac{P}{kT}$, rezultă că la temperatură constantă parcursul liber mediu este invers proporțional cu presiunea:

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} . \quad (25.4)$$

Odată cu creșterea temperaturii diametrul eficace se micșorează, iar parcursul liber mediu crește conform relației

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\infty} \frac{T}{T + c} ,$$

unde λ_{∞} este parcursul liber mediu pentru $T = \infty$, iar c este o constantă de material.

Să evaluăm valorile mărimilor fizice $\bar{\lambda}$ și $\bar{\gamma}$. Considerăm un gaz ideal în condiții normale. Atunci $n = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (numărul lui Loschmidt). Dacă mai admitem, că raza eficace a unei molecule este $r = \frac{d}{2} \approx 10^{-10} \text{ m}$, din egalitatea (25.4) se obține $\bar{\lambda} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Micșorarea presiunii până la $p \approx 10^{-1} \text{ Pa}$ are drept urmare creșterea parcursului liber mediu până la $\bar{\lambda} = 10 \text{ cm}$. Deci, în aceste condiții, moleculele unui gaz dintr-un recipient cu dimensiunile de ordinul a câțiva centimetri se pot deplasa de la un perete la altul fără să se ciocnească între ele. La presiuni $p \approx 10^{-4} \text{ Pa}$ parcursul liber mediu atinge valori de ordinul zecilor de metri.

Din relația (25.2), în care se substituie $v \approx 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ și $\bar{\lambda} \approx 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ se obține pentru oxigen, aflat în condiții normale, $\bar{\gamma} \approx 8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. Cu micșorarea presiunii scade proporțional și numărul mediu de ciocniri.

§26. Fenomene de transport

În fizica statistică se studiază sisteme macroscopice, aflate în stare de echilibru, în care decurg procese reversibile (a se vedea §29.1). Primele studii ale proceselor ireversibile, ce au loc în sisteme macroscopice aflate în stare de neechilibru, au fost întreprinse de către R. Clausius (an. 1850) și W. Thomson (an. 1854) care au pus baza cineticii fizice. Unii parametri ai sistemului macroscopic, în care au loc procese ireversibile, variază de la un punct la altul și în timp (dacă procesul nu este staționar). Prin urmare, nu mai este posibilă o descriere globală a stării sistemului și a evoluției ei. Este necesară o descriere a stărilor momentane ale sistemului în fiecare punct și în timp. Pentru a realiza această descriere sistemul macroscopic se împarte imaginar într-un număr foarte mare de subsisteme, fiecare de volum ΔV , suficient de mic pentru ca în interiorul său să se realizeze, practic instantaneu, starea de echilibru. Totodată, aceste subsisteme trebuie să aibă un volum suficient de mare pentru ca fiecare din ele să fie considerat sistem macroscopic. În decursul proceselor ireversibile are loc o mișcare complexă a materiei, care constă din deplasarea de substanță, transfer de energie, sau transfer de sarcină electrică, etc, dintr-un subsistem în altul. Pentru a caracteriza variația unei mărimi scalare M de la un subsistem la altul (de la un punct la altul) al sistemului considerat se introduce *vectorul densității de flux* al acestei mărimi, numeric egal cu valoarea mărimii M transportată în unitatea de timp, printr-o unitate de suprafață, situată normal față de direcția de transport

$$\vec{j}_M = \frac{d}{ds_n} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right) \vec{n}, \quad (26.1)$$

unde \vec{n} este vectorul unitate al axei, în lungul căreia are loc transportul respectiv, iar ds_n este elementul de suprafață, normal la acest vector unitate. Ca exemplu se pot da: densitatea fluxului de masă \vec{J}_m , densitatea fluxului de entropie \vec{J}_s , etc. Procesele fizice ireversibile, însoțite de un flux de energie, substanță, etc., sunt numite fenomene de transport. Atunci când un fenomen este însoțit de transport de substanță se spune că se produce difuzia moleculară. Dacă fenomenul este însoțit de transport de energie se produce conductibilitatea termică, iar când este însoțit de transport de impuls are loc frecarea internă, numită și vâscozitate.

Fenomenele de transport se pot produce în gaze, lichide și solide. În gaze aceste fenomene se realizează în rezultatul dereglării caracterului complet haotic al mișcării moleculelor, deci și a nerealizării distribuției Maxwell a moleculelor după viteze. Strict vorbind, studiul fiecărui fenomen de transport trebuie început cu determinarea abaterilor de la distribuția Maxwell, ceea ce permite deducerea riguroasă a legităților fenomenului respectiv. Datorită accesibilității calculelor, în cele ce urmează ne vom referi doar la fenomenele de transport în gaze ideale. Ne vom limita cu analiza legităților experimentale principale ale acestor fenomene și cu fundamentarea lor doar calitativă în baza teoriei cinetico-moleculare.

26.1. Ecuații generale ale fenomenelor de transport în gaze ideale

Considerăm un parametru microscopic statistic A , ce descrește liniar în lungul axei Oz , $\frac{\partial A}{\partial z} \neq 0$. Neomogenitatea mărimii A condiționează apariția în gaz a transportului, în sensul pozitiv al axei Oz , altei mărimi fizice $M = M(A)$. De exemplu, dacă mărimea A reprezintă energia cinetică medie a moleculei, direct proporțională cu temperatura locală T , atunci M reprezintă energia internă. Evident, că numărul de molecule ce traversează în unitatea de timp o unitate de suprafață cu coordonata z , situată

normal față de axa Oz , într-un sens sau altul, este direct proporțională cu concentrația n a moleculelor și cu viteza lor medie \bar{v} . Totodată, cu cât este mai mare diferența valorilor mărimii A , ce caracterizează moleculele ce traversează suprafața indicată în sensuri opuse, într-o unitate de timp, cu atât este mai mare densitatea fluxului mărimii fizice $M(A)$. Putem considera că distanța medie, parcursă de o moleculă de la ultima ciocnire până la trecerea prin suprafața indicată este egală cu parcursul liber mediu $\bar{\lambda}$. Generalizând aceste raționamente, obținem că densitatea fluxului mărimii $M = M(A)$ este direct proporțională cu n , \bar{v} , cât și cu diferența valorilor mărimii A dintre punctele cu coordonatele $(z - \bar{\lambda})$ și $(z + \bar{\lambda})$:

$$j_M \approx n\bar{v}[A(z - \bar{\lambda}) - A(z + \bar{\lambda})]$$

Deoarece

$$A(z + \bar{\lambda}) \approx A(z) + \bar{\lambda} \frac{\partial A}{\partial z},$$

$$A(z - \bar{\lambda}) \approx A(z) - \bar{\lambda} \frac{\partial A}{\partial z},$$

obținem:

$$j_M \sim 2n\bar{v}\bar{\lambda} \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (26.2)$$

Relația (26.2) este numită *ecuație de transport* a mărimii M . Această ecuație poate fi dedusă și pentru cazul, în care în sistem variază, în sensul pozitiv al axei Oz , mărimea fizică A_v raportată la o unitate de volum (de exemplu, densitatea gazului). Atunci,

$$A_v = nA, \quad j_M \sim 2\bar{v}\bar{\lambda} \frac{\partial A_v}{\partial z}. \quad (26.3)$$

În relațiile (26.2), (26.3) derivatele $\frac{\partial A}{\partial z}$ și $\frac{\partial A_v}{\partial z}$ reprezintă proiecția pe Oz a gradientului mărimii A , respectiv A_v . Dacă se efectuează un studiu riguros al fenomenelor de transport, bazat pe teoria

cinetico-moleculară a gazelor ideale, se ajunge la următoarele *ecuații de transport*,

$$j_M = \frac{1}{3} n \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (26.4)$$

$$j_M = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\partial A_v}{\partial z} . \quad (26.5)$$

numite și formule generale ale fenomenelor de transport în gaze.

26.2. Conductibilitatea termică

Prin *conductibilitate termică* se înțelege transportul ordonat de energie internă, numit și transport de căldură, atunci când moleculele gazului din subsisteme diferite posedă energii cinetice medii diferite. Transportul ordonat de energie internă se produce în rezultatul mișcării termice haotice și interacțiunii moleculelor, în sensul descreșterii energiei lor cinetice medii, adică în sensul descreșterii temperaturii. Pentru simplitate, vom considera că transportul de energie se produce unidirecțional, în sensul pozitiv al axei oz , pentru care $\frac{\partial T}{\partial z} < 0$, deoarece fluxul de căldură se transportă în sensul micșorării temperaturii.

Conductibilitatea termică se caracterizează prin *densitatea fluxului de energie internă*, sau densitatea fluxului de căldură, j_u ,

$$j_u = \frac{d}{ds_n} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right),$$

care respectă *legea experimentală a lui Fourier*,

$$j_u = -k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (26.6)$$

unde k se numește coeficient de conductibilitate termică, iar semnul „-” indică faptul, că transportul de energie are loc în sensul micșorării temperaturii. Atunci, energia transportată prin suprafața ds_n în timpul dt este determinată de expresia:

$$\partial U = j_u ds_n dt$$

Pentru ca, într-un proces izocor, temperatura unei unități de volum de gaz ideal să fie ridicată cu dT , este necesară energia (a se vedea §28.1)

$$\partial U_v = \rho c_v dT,$$

unde ρ este densitatea gazului, iar c_v -căldura specifică la volum constant. Atunci

$$\frac{\partial U_v}{\partial z} = \rho c_v \frac{dT}{dz}. \quad (26.7)$$

Ultimele relații indică clar, că mărimea M din relația (26.5) este energia internă, iar A_v reprezintă energia internă a unității de volum U_v , direct proporțională cu temperatura locală $U_v \sim T$. Se substituie egalitatea (26.7) în (26.5)

$$j_u = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_v \frac{dT}{dz}. \quad (26.8)$$

Comparând expresiile (26.8) și (26.6), obținem o relație pentru coeficientul k :

$$k = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_v. \quad (26.9)$$

Formula (26.9) exprimă coeficientul de conductibilitate termică în funcție de mărimile caracteristice ale teoriei cinetico-moleculare: viteza medie \bar{v} și parcursul liber mediu al moleculelor gazului $\bar{\lambda}$, densitatea gazului ρ , căldura specifică la volum constant.

26.3. Frecarea internă (vâscozitate)

Să considerăm curgerea, provocată de acțiuni externe, a unui gaz. În volumul gazului se pot separa straturi, ce se deplasează ordonat în lungul axei x , având valori diferite ale vitezelor (fig.4.10), adică $v = f(z)$.

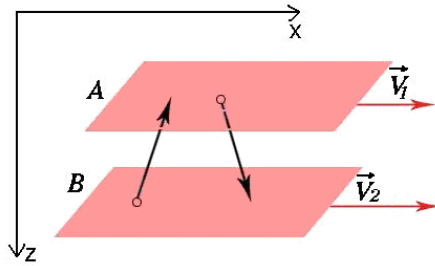


Fig.4.10

Mișcarea ordonată a straturilor se suprapune mișcării haotice a moleculelor, în rezultatul căreia: moleculele din straturile cu viteză mai mare trec în straturile cu viteză mai mică și astfel viteza acestora din urmă se mărește; moleculele din straturile cu viteza mai mică trec în straturile cu viteză mai mare și, în rezultat, viteza acestora din urmă se micșorează. Ca rezultat global apare transport al impulsului P_x de la straturile cu viteze mai mari către straturile cu viteze mai mici. Fenomenul descris, numit frecare internă sau vâscozitate, se supune unei legi analogice legii lui Fourier pentru conductibilitatea termică:

$$j_p = \frac{\partial}{\partial s_n} \frac{\partial P_x}{\partial t} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (26.9)$$

unde j_p este densitatea fluxului de impuls, η se numește

coeficient de *frecare internă sau vâscozitate dinamică*, iar $\frac{\partial v_x}{\partial z}$

reprezintă proiecția pe Oz a gradientului vitezei straturilor. Având

în vedere legătura dintre variația impulsului și forță $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

(principiul fundamental al mecanicii) se poate afirma: asupra stratului considerat acționează o forță tangențială la suprafața de contact ∂s între acest strat și cel vecin, valoarea căreia rezultă din relația (26.9):

$$dF_1 = \frac{\partial P_{1x}}{\partial t} = j_p \partial s = -\eta \partial s \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (26.10)$$

Analog, asupra stratului vecin acționează forța $d\vec{F}_2 = -d\vec{F}_1$. Formula (26.10) este numită *legea lui Newton pentru frecarea internă*. Conform acestei legi, forța de frecare internă, tangențială la suprafața de contact ∂s dintre două straturi de gaz este direct proporțională cu variația vitezei lor ordonate pe unitate de lungime, în direcția normalei la suprafața de contact între straturi. Menționăm, că relațiile (26.9), (26.10) au același aspect și pentru lichide reale în curgere laminară.

Din această analiză a frecării interne urmează că mărimea A_v din formula (26.5) reprezintă impulsul mișcării ordonate a moleculelor din unitatea de volum

$$P_v = n m_0 v_x = \rho v_x,$$

unde m_0 este masa unei molecule.

Atunci

$$\frac{\partial P_v}{\partial z} = n m_0 \frac{\partial v_x}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Substituim această expresie în relația (26.5) și obținem *densitatea fluxului de impuls*

$$j_p = -\frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} \rho \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} n m_0 \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (26.11)$$

Comparând relațiile (26.9) și (26.11) urmează expresia pentru *vâscozitatea dinamică*

$$\eta = \frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} \rho = \frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} n m_0. \quad (26.12)$$

Pentru gaze viteza medie \bar{v} este proporțională cu $\sqrt{\frac{T}{m_0}}$, iar

parcursul liber mediu $\bar{\lambda}$ este proporțional cu $\frac{1}{n d^2}$. Atunci,

$$\eta \sim n m_0 \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{1}{n d^2} \sim \frac{\sqrt{m_0}}{d^2} \sqrt{T}. \quad (26.13)$$

Rezultă că vâscozitatea dinamică η nu depinde de concentrația n a moleculelor gazului și deci nu depinde nici de presiune. Această concluzie se explică astfel. Concomitent cu presiunea se micșorează concentrația, adică numărul de molecule care efectuează transportul de impuls, dar crește parcursul liber mediu $\bar{\lambda}$, deci și variația impulsului. În rezultat, η rămâne constant. Această explicație este valabilă numai atunci când $\bar{\lambda}$ este mic în comparație cu dimensiunea deschiderii, prin care curge gazul (de exemplu, diametrul tubului). În caz contrar η se micșorează odată cu scăderea presiunii. Conform relației (26.13) avem $\eta \sim \sqrt{T}$, adică $\frac{\eta}{\sqrt{T}} = \text{const.}$ În realitate, acest raport crește lent odată cu temperatura, ceea ce se explică prin dependența de temperatură a parcursului liber mediu.

26.4. Difuzia

Prin *difuzie* se înțelege o deplasare ordonată a moleculelor dintr-un subsistem în altul atunci când în sistemul considerat există un gradient al concentrației moleculelor (sau al densității substanței). Vom admite, pentru simplitate, că difuzia se produce după o singură direcție, OZ , deci concentrația moleculelor gazului $n = n(z)$ și $\frac{\partial n}{\partial z} \neq 0$. Deoarece $\rho = n m_0$, unde m_0 este masa unei

molecule, urmează că și $\frac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$. Difuzia este caracterizată de *densitatea fluxului de molecule* j_N , numeric egală cu numărul de molecule care traversează în unitatea de timp unitatea de suprafață, situată normal la direcția în care se produce difuzia. Dacă se consideră suprafața ds_n , normală la direcția de difuzie, atunci în timpul dt prin ea se transportă numărul de molecule, determinat de expresia

$$dN = j_N ds dt. \quad (26.14)$$

Date experimentale conduc la concluzia, că densitatea fluxului de molecule este direct proporțională cu proiecția gradientului concentrației lor, adică

$$j_N = -D \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (26.15)$$

Coeficientul de proporționalitate D se numește *coeficient de difuzie*, iar semnul „-” arată că difuzia se produce în sensul micșorării concentrației. Expresia (26.15) reprezintă *prima lege a lui Fick pentru difuzia unidirecțională*. Legea lui Fick se mai exprimă prin masa de gaz transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață, normală la direcția de difuzie, anume j_m ,

$$j_m = -D \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (26.16)$$

Atunci, densitatea ρ reprezintă mărimea A_v din (26.5). Comparând formulele (26.5) și (26.16) obținem:

$$D = \frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3}. \quad (26.17)$$

Se substituie formulele (25.4) și (23.29) în (26.17). Urmează:

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 p} \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m_0} d^2 p}. \quad (26.18)$$

Coeficientul de difuzie depinde de natura gazului prin masa unei molecule m_0 și diametrul ei eficace d . La presiune constantă

coeficientul de difuzie este proporțional cu $T^{\frac{3}{2}}$. Această concluzie nu este riguroasă, deoarece s-a constatat că diametrul eficace d depinde de temperatură. La $T = \text{const}$ coeficientul de difuzie este invers proporțional presiunii p .

Să considerăm un strat de gaz cu aria bazei s și înălțimea dz . Numărul de molecule din acest strat este $nsdz$. Variația în timp a acestui număr de molecule este egal cu diferența fluxului de molecule prin cele două suprafețe cu aria s fiecare și cu coordonatele z și $z + dz$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n s dz) = s[j_N(z) - j_N(z + dz)].$$

Mărimile fizice $j_N(z)$ și $j_N(z + dz)$ reprezintă, în general, niște funcții de mai multe variabile. Considerând toate aceste variabile, cu excepția lui z , constante, obținem

$$j_N(z + dz) \approx j_N(z) + \frac{\partial j_N}{\partial z} dz.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(n s dz) &= s \left[j_N(z) - j_N(z) - \frac{\partial j_N}{\partial z} dz \right], \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= - \frac{\partial j_N}{\partial z}. \end{aligned} \quad (26.19)$$

Am obținut *ecuația de continuitate pentru fenomenul de difuzie*, care exprimă legea conservării numărului de molecule. Dacă în această ecuație se substituie prima lege a lui Fick (26.15), obținem:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{d^2 n}{dz^2}. \quad (26.20)$$

Relația obținută se numește *legea a doua a lui Fick* și reprezintă ecuația diferențială a difuziei, care descrie complet acest fenomen dacă se cunosc condițiile inițiale. Prin integrarea ei se obține concentrația ca funcție de z la orice moment t .

Rezultatul difuziei este uniformizarea concentrației gazului în sistemul considerat, indiferent de faptul dacă acest sistem reprezintă un gaz omogen din punct de vedere chimic sau un amestec de gaze. Coeficientul de difuzie al unui amestec de două gaze cu masele moleculelor m_{01} , respectiv m_{02} și diametrele eficace a moleculelor d_1 , respectiv d_2 , se calculează astfel:

$$D = B \sqrt{\frac{T}{m'_0}} \frac{1}{d_{12}^2 n},$$

unde B este un coeficient numeric, $m'_0 = \frac{m_{01}m_{02}}{m_{01} + m_{02}}$ se numește

masă redusă a moleculelor amestecului, iar $d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$

reprezintă diametrul eficace al moleculelor amestecului.

Difuzia se produce nu numai în medii gazoase, dar și în lichide și solide. Dacă se calculează distanța medie, parcursă de substanța care difuzează într-o unitate de timp, se obțin rezultate foarte diferite, deoarece difuzia în gaze se produce mult mai rapid decât în lichide și solide. De exemplu, în condiții normale, într-o secundă, fluxul de aer înaintază în vapori de apă cu $\approx 0,5\text{ cm}$, pe când fluxul de aur înaintază în plumb cu $\approx 1\text{ cm}$ în 24 ore.

26.5. Consecințe din teoria fenomenelor de transport în gaze

Din formulele (26.8), (26.12), (26.17) se obțin următoarele relații dintre coeficienții de transport

$$k = \eta c_v = \rho c_v D$$

Din aceste relații rezultă că determinarea experimentală a unor coeficienți de transport permite calculul celorlalți. Fenomenele de transport permit calculul diametrelor eficace ale moleculelor gazelor omogene din punct de vedere chimic, dacă se determină experimental valorile coeficienților de transport și caracteristicile gazului, anume: viteza medie la temperatura dată, căldura specifică, masa molară.

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1.

Într-un recipient cu volumul $V=1,00\text{ l}$ se află un mol de azot. Să se afle:

a) temperatura azotului, pentru care eroarea relativă a presiunii, calculate din ecuația de stare a gazului ideal, este de 10% față de presiunea calculată din ecuația Van der Waals.

b) presiunea gazului la această temperatură.

Rezolvare

Notăm prin P_i și P presiunea gazului determinată din ecuația de stare a gazului ideal, respectiv din ecuația *Van der Waals*.

$$P_i V = \nu RT, \quad P_i = \frac{\nu RT}{V} = \frac{RT}{V}; \quad (\nu = 1 \text{ mol}),$$

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

$$\text{În conformitate cu condiția problemei } \eta = \frac{P_i - P}{P} = 0,1.$$

Scriem acest raport, substituind relațiile de mai sus,

$$\frac{\frac{RT}{V} - \frac{RT}{V - b} + \frac{a}{V^2}}{\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}} = \eta.$$

Din egalitatea obținută se exprimă T ,

$$T = \frac{a(1 + \eta)(V - b)}{RV(\eta V + b)}.$$

Valorile mărimilor a și b se determină din tabele: pentru azot

$$a = 1,35 \frac{\text{atm l}^2}{\text{mol}^2}, \quad b = 0,027 \frac{\text{l}}{\text{mol}}. \text{ Rezultă } T = 133 \text{ K. Din ecuația}$$

Van der Waals se exprimă presiunea :

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

Substituind valorile mărimilor în *SI*, obținem $P \approx 10^6 \text{ Pa}$.

Problema 2

Să se determine cea mai mică valoare posibilă a presiunii gazului ideal, temperatura căruia respectă legea $T = T_0 + \alpha V^2$, unde α, T_0 sunt constante pozitive, iar V este volumul unui mol de gaz.

Rezolvare

Vom folosi ecuația de stare a gazului ideal și legea variației temperaturii pentru a obține dependența presiunii de volum.

$$PV = \nu RT, \quad P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{R}{V}(T_0 + \alpha V^2), \quad (\nu = 1 \text{ mol}).$$

Vom obține valoarea minimă a presiunii, impunând condiția.

$$\frac{dP}{dV} = 0, \Rightarrow -\frac{R}{V^2}(T_0 + \alpha V^2) + \frac{R}{V} 2\alpha V = 0, \Rightarrow V = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}.$$

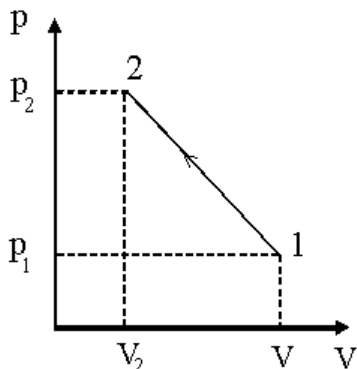
Substituim această valoare a volumului în dependența presiunii de volum. Obținem

$$P_{\min} = \frac{R}{\sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}}(T_0 + \alpha \frac{T_0}{\alpha}) = 2R\sqrt{\alpha T_0}.$$

Problema 3

Într-un cilindru prevăzut cu un piston se află heliu cu masa $m=20$ g. Gazul este adus quasistatic din starea de volum $V_1=321$ și presiune $P_1=4,1$ atm în starea de volum $V_2=91$ și presiune $P_2=15,5$ atm. Ce temperatură maximă atinge gazul dacă procesul este reprezentat printr-o dreaptă ce unește punctele 1 și 2? Să se determine presiunea și volumul în punctul de temperatură maximă

Rezolvare



Graficul descrie un proces particular, care nu este simplu. Ecuația acestui proces este ecuația dreptei $P = aV + b$. Vom determina constantele a și b din sistemul, format din egalitățile $P_1 = aV_1 + b$, $P_2 = aV_2 + b$. Obținem:

$$a = \frac{P_1 - P_2}{V_1 - V_2} = -0.5 \frac{\text{atm}}{1} = -5 \cdot 10^7 \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3},$$

$$b = \frac{P_2 V_1 - P_1 V_2}{V_1 - V_2} = 20 \text{ atm} = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Exprimăm temperatura T din ecuația de stare a gazului ideal și în egalitatea obținută substituim ecuația procesului .

$$T = \frac{PV}{\nu R} = \frac{1}{\nu R} (aV^2 + bV).$$

Dependența temperaturii de volum este descrisă de ecuația unei parabole cu ramurile în jos. Folosind condiția de maxim, $\frac{dT}{dV} = 0$, determinăm volumul V_m ce corespunde temperaturii maxime T_m și această temperatură.

$$\frac{d}{dV} \left[\frac{1}{\nu R} (aV^2 + bV) \right] = 0, V_m = -\frac{b}{2a} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3,$$

$$T_m = \frac{1}{\nu R} \left(a \frac{b^2}{4a^2} - b \frac{b}{2a} \right) = -\frac{b^2}{4\nu R a} = 481 \text{ K}.$$

Substituind a, b, V_m în ecuația procesului calculăm presiunea ce corespunde temperaturii maxime.

$$P_m = aV_m + b = \frac{b}{2} = 10^6 \text{ Pa}.$$

Problema 4

Să se determine temperatura gazului, pentru care:

- viteza pătratică medie a moleculelor de hidrogen este mai mare decât viteza cea mai probabilă cu $\Delta v = 400 \text{ m/s}$;*
- maximul funcției de distribuție a moleculelor de oxigen după viteze corespunde vitezei $v = 420 \text{ m/s}$.*

Rezolvare

a) În conformitate cu condiția problemei $v_{pm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ este

mai mare decât $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ cu Δv , adică

$$\sqrt{\frac{3RT}{M}} - \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \Delta v, \quad \frac{RT}{M}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\Delta v)^2,$$

$$T = \frac{M(\Delta v)^2}{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \approx 420 \text{ K}.$$

b) Maximul funcției de distribuție a moleculelor după viteze corespunde vitezei cele mai probabile

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

prin urmare $\sqrt{\frac{2RT}{M}} = 420 \text{ m/s}, \quad T \approx 340 \text{ K}.$

Problema 5

Să se calculeze vitezele cea mai probabilă, pătratică medie și medie a moleculelor gazului, densitatea căruia este $\rho = 1 \text{ g/l}$ la presiune normală. Considerând că acest gaz este azot, $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, să se calculeze energia medie de translație a unei molecule și concentrația gazului.

Rezolvare

Din ecuația de stare a gazului ideal rezultă următoarea expresie pentru densitatea gazului

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT},$$

din care exprimăm raportul $\frac{RT}{M} = \frac{P}{\rho}$, ce se substituie în egalitățile pentru viteze.

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} = 450 \text{ m/s},$$

$$v_{pm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = 550 \text{ m/s},$$

$$v_m = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8P}{\pi \rho}} = 510 \text{ m/s}.$$

Pentru a afla energia medie de translație a unei molecule

$$\bar{W}_{tr} = \frac{3}{2} kT \text{ determinăm în prealabil temperatura } T = \frac{MP}{R\rho}.$$

Obținem ,

$$\bar{W}_{tr} = \frac{3kT}{2} = \frac{3}{2} k \cdot \frac{MP}{R\rho} = \frac{3}{2} k \frac{MP}{kN_A \rho} = \frac{3}{2} \frac{MP}{N_A \rho} = 7 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

În fine, calculăm concentrația gazului din ecuația fundamentală a teoriei cinetico-moleculară

$$P = \frac{1}{3} n \bar{W}_{tr}, \quad n = \frac{3P}{\bar{W}_{tr}} = 4,3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Problema 6

La ce temperatură numărul de molecule cu viteza din intervalul $(v, v+dv)$ are valoare maximă ? Masa fiecărei molecule este m .

Rezolvare

Numărul de molecule vitezele cărora au valori din intervalul dat $(v, v+dv)$ se determină conform distribuției Maxwell.

$$dN = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} N dv.$$

În condițiile problemei date notăm

$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N dv = \text{const}.$$

Astfel, numărul de molecule cu viteze din intervalul dat depinde numai de temperatură și are valoare maximă atunci când $\frac{d(dN)}{dT} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}(dN) &= \text{const} \cdot \frac{d}{dT} \left(T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right) = \\ &= \text{const} \left[-\frac{3}{2} T^{-\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} + T^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot \frac{mv^2}{2RT^2} \right] = 0 \Rightarrow \\ &e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot T^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{3}{2} + \frac{mv^2}{2kT} \right) = 0. \end{aligned}$$

Corespunde valorii maxime și are sens fizic soluția $T = \frac{mv^2}{3k}$.

Problema 7

Gazul ideal cu masa molară M se află într-un recipient cilindric înalt, vertical, cu aria bazei S și înălțimea h_0 . Temperatura gazului este T , iar presiunea pe baza de jos a cilindrului este P_0 . Considerând că temperatura și accelerația căderii libere nu depind de înălțime să se calculeze masa gazului din recipient.

Rezolvare

Considerăm masa elementară dm a gazului, conținut într-un volum elementar dV al recipientului

$$dm = \rho dV = \rho S dh,$$

unde ρ este densitatea gazului, dh este înălțimea volumului elementar. Din ecuația de stare a gazului ideal rezultă următoarea expresie pentru densitatea gazului

$$\rho = \frac{PM}{RT}.$$

Pentru dependența presiunii gazului de înălțime scriem formula barometrică

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Substituind ultimele două egalități în prima obținem

$$dm = \frac{MS}{RT} P e^{-\frac{Mgh}{RT}} dh = \frac{SP_0}{g} e^{-\frac{Mgh}{RT}} d\left(\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Se integrează egalitatea obținută în limitele 0, m pentru masă și 0, $x_0 = \frac{Mgh_0}{RT}$ pentru mărimea $x = \frac{Mgh}{RT}$. Obținem masa gazului m ,

$$m = -\frac{SP_0}{g} \int_0^{x_0} e^{-x} d(-x) = -\frac{SP_0}{g} e^{-x} \Big|_0^{x_0} = \frac{SP_0}{g} \left(1 - e^{-\frac{Mgh_0}{RT}}\right).$$

Problema 8

Energia potențială a moleculelor gazului ideal, aflat într-un câmp central de forțe, depinde de distanța r până la centrul câmpului conform legii $W_p(r) = \alpha r^2$, unde α este o constantă pozitivă. Considerând temperatura gazului T , iar concentrația moleculelor în centrul câmpului n_0 , să se determine:

- numărul de molecule aflat la distanțele de la r până la $r+dr$ de la centrul câmpului;*
- distanța cea mai probabilă a moleculelor de la centru;*
- numărul relativ de molecule aflat la distanța de la r până la $r+dr$ de la centrul câmpului.*

Rezolvare

a) Distribuția Boltzmann pentru moleculele gazului ideal, aflat într-un câmp potențial permite calculul concentrației moleculelor în dependență de energia lor potențială, adică de poziția lor în câmp. Câmpul central este potențial, deci putem folosi legea acestei distribuții

$$n = n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}}.$$

În cazul câmpului central moleculele, aflate la distanțele de la r până la $r+dr$ de la centrul câmpului, ocupă un strat sferic

elementar cu grosimea dr și volumul $dV = 4\pi r^2 dr$. Numărul de molecule în acest strat este

$$dN = n dV = n_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} 4\pi r^2 dr.$$

b) Distanța r de la centrul câmpului este cea mai probabilă dacă numărul de molecule ,aflate la această distanță ,este maxim. Prin urmare, trebuie calculată și egalată cu zero derivata în raport cu r a expresiei $\frac{dN}{dr}$, obținută din formula de mai sus.

$$\frac{d}{dr} \left(n_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} 4\pi r^2 \right) = 0, \quad e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} \left(-\frac{2\alpha r}{kT} \right) + e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} 2r = 0,$$

$$2re^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} \left(-\frac{2\alpha r}{kT} + 1 \right) = 0.$$

Valorii maxime a numărului de molecule îi corespunde distanța cea mai probabilă

$$r_p = \sqrt{\frac{kT}{\alpha}}.$$

c) Pentru a determina numărul relativ de molecule aflat în stratul sferic cu grosimea dr , adică raportul $\frac{dN}{N}$, trebuie calculat, în prealabil, numărul total de molecule N . Pentru aceasta se integrează expresia pentru dN în limitele de la 0 la ∞ .

$$N = 4\pi n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 dr = 4\pi n_0 \frac{1}{\frac{2\alpha}{kT}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\alpha}{kT}}} = \left(\frac{\pi kT}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} n_0.$$

Calculul integralei s-a efectuat în baza formulei generale de calcul a unor astfel de integrale (23.28).

Pentru raportul $\frac{dN}{N}$ obținem

$$\frac{dN}{N} = 4\pi n_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 dr \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{n_0} = \left(\frac{\alpha}{\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi r^2 e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} dr.$$

Problema 9

Sa se stabilească numărul maxim de molecule de azot care se pot afla într-un vas de forma sferică cu diametrul D , astfel încât moleculele să nu se ciocnească între ele.

Rezolvare

Pentru ca moleculele să nu se ciocnească între ele trebuie ca parcursul liber mediu λ să satisfacă condiția $\lambda \geq D$.

Deoarece $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, urmează ,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \geq D, \quad n \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D}.$$

Pentru numărul total maxim de molecule în vas obținem,

$$N = nV = n \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{D^2}{6\sqrt{2}d^2}.$$

Problema 10

Să se calculeze numărul z al ciocnirilor într-o secundă dintre moleculele de hidrogen, aflate în volumul $V=1\text{mm}^3$ în condiții normale. Diametrul efectiv pentru molecula de hidrogen este $d \approx 2,3 \cdot 10^{-10}\text{m}$.

Rezolvare

Numărul de ciocniri ale unei molecule într-o secundă este

$$Z_1 = \frac{v_m}{\lambda} = v_m \sqrt{2}\pi d^2 n, \text{ unde } v_m \text{ este viteza medie}$$

aritmetică, $v_m = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$. Concentrația n a moleculelor gazului o

vom determina din relația $n = \frac{P_0}{kT_0}$. Numărul de ciocniri într-o

secundă dintre toate moleculele gazului este $Z = Z_1 \cdot N / 2$, N fiind numărul total de molecule, $N=nV$. Prin urmare

$$Z = Z_1 \cdot \frac{nV}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 n^2 v_m V}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 P^2 V}{2k^2 T^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1,6 \cdot 10^{26} \text{ s}^{-1}.$$

Problema 11

Pentru un gaz, aflat în condiții normale, constanta Van der Waals $b=40$ ml/mol. Să se determine parcursul liber mediu al moleculelor acestui gaz.

Rezolvare

Constanta b este egală cu volumul propriu al tuturor moleculelor dintr-un mol de gaz, înmulțit la patru, $b=4N_a V_l$, unde

volumul unei molecule $V_l = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3$. Din aceste egalități urmează expresia pentru d

$$d = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_a}}$$

care se substituie în relația pentru parcursul liber mediu ,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2 P_0} = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi P_0} \left(\frac{2\pi N_a}{3b}\right)^{\frac{2}{3}} = 84 \text{ nm} .$$

Problema 12

Volumul unui gaz ideal biatomic se micșorează adiabatic de $a=10$ ori. Cum și de câte ori variază coeficienții de difuzie D și de vâscozitate η ?

Rezolvare

Scriem ecuația procesului adiabatic (28.13)

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = a^{1-\gamma},$$

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$, i fiind numărul de grade de libertate ale

moleculii. Pentru gazul biatomic $i=5$, $\gamma=1,4$. Cunoaștem relația (26.17) pentru coeficientul de difuzie. O modificăm, substituind relațiile pentru viteza medie, parcursul liber mediu și concentrația

$$n = \frac{\nu N_A}{V},$$

$$D = \frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2} \cdot \frac{V}{\nu N_A}.$$

Considerând $d=\text{const}$, am obținut următoarele dependențe

$$D_1 \sim \sqrt{T_1} V_1, \quad D \sim \sqrt{T_2} V_2, \quad \frac{D_2}{D_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{V_2}{V_1} = a^{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot a = a^{\frac{4}{5}}.$$

Calculul numeric indică, că coeficientul de difuzie se micșorează de aproximativ 6,3 ori. Pentru vâscozitatea dinamică η se deduce relația (26.13), în care vom substitui formulele de calcul pentru viteza medie și pentru parcursul liber mediu,

$$\eta = \frac{\bar{v}\bar{\lambda}}{3} nm_0 = \frac{nm_0}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{2}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{R}{\pi M}} \sqrt{T}.$$

Considerând din nou $d=\text{const}$ scriem:

$$\eta_1 \sim \sqrt{T_1}, \quad \eta_2 \sim \sqrt{T_2}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = a^{\frac{\gamma-1}{2}} = a^{\frac{1}{5}}.$$

Calculul numeric arată că η crește de aproximativ 1,6 ori.

Întrebări de verificare

1. Să se explice condițiile în care ecuația Clapeyron-Mendeleev rezultă din ecuația Van der Waals.
2. Care este interpretarea cinetico-moleculară a noțiunilor de presiune, temperatură termodinamică?
3. Să se definească probabilitatea de distribuție și să se explice formula de calcul a ei în cazul nivelelor energetice: *a)* nedegenerate; *b)* degenerate. Să se caracterizeze starea sistemului termodinamic cu probabilitatea de distribuție maximă.
4. Ce sens fizic are funcția de distribuție a particulelor după: *a)* energii; *b)* viteze?
5. Să se arate că lege de distribuție a moleculelor gazului ideal după viteze se poate deduce din legea de distribuție a moleculelor gazului ideal după energii.
6. De ce mărimi fizice depinde viteza cea mai probabilă a moleculelor gazului ideal?
7. Să se explice legea de distribuție Boltzmann a moleculelor gazului ideal după energii într-un câmp extern de forțe conservative, cât și formula barometrică.
8. Să se indice simplificările, admise la deducerea legii clasice a echipartiției energiei cinetice medii după grade de libertate.
8. Să se explice formula de calcul a parcursului liber mediu al moleculelor de gaz.
10. Să se explice condițiile necesare pentru apariția fenomenelor de transport, folosind în calitate de exemple conductibilitatea termică, frecarea internă și difuzia.

****Bazele termodinamicii**

În §§27-32 se vor defini noi mărimi fizice, care caracterizează sistemele macroscopice și interacțiunea lor cu mediul exterior. Aceste mărimi se vor folosi pentru formularea principiilor termodinamicii, cu ajutorul cărora se vor descrie diverse procese, ce pot decurge într-un sistem macroscopic. Forma de prezentare a acestor teme urmărește și scopul de a explica legile și procesele termodinamice în baza structurii moleculare a sistemelor considerate, adică în baza fizicii statistice clasice.

Caracterul fenomenologic al termodinamicii a condus la formularea următoarelor afirmații–postulate ale termodinamicii–puse la baza ei.

1. Un sistem termodinamic izolat ajunge întotdeauna într-o stare de echilibru, din care niciodată nu poate ieși de la sine.

2. Dacă sistemele termodinamice, ce se află în contact termic, nu schimbă căldură între ele, se spune că aceste sisteme se află în stare de echilibru termic, în care ele au aceeași temperatură. În această stare parametri interni sunt funcții de parametri externi și de temperatură. Acest postulat stă la baza tuturor metodelor de măsură a temperaturii corpurilor.

§ 27. Principiul întâi al termodinamicii

27.1. Energia internă a sistemului termodinamic

Considerăm un sistem macroscopic, particulele căruia interacționează între ele și cu mediul exterior, schimbând energie cu acesta. Energia cinetică totală a sistemului $W_c = W_c(T)$ este egală cu suma energiilor cinetice ale particulelor componente. Determinarea acestei energii necesită alegerea unui sistem de referință. De obicei, acesta este sistemul centrului de masă, în raport cu care impulsul sistemului macroscopic este egal cu zero. Sistemul macroscopic are și energie potențială. Considerăm energia potențială $W_p = W_p(V)$ egală cu suma energiilor de interacțiune dintre moleculele sistemului. *Energia internă a*

sistemului reprezintă, prin definiție, suma dintre energiile cinetică W_c și potențială W_p

$$U = W_c(V) + W_p(V). \quad (27.1)$$

Este importantă precizarea, că energia internă (27.1) nu conține energia de mișcare a sistemului ca întreg și energia potențială a sistemului în câmpuri de forțe externe. Conform definiției (27.1) energia internă depinde numai de parametrii ce caracterizează starea internă a sistemului, fiind o caracteristică intrinsecă a acestei stări. Aceasta înseamnă că energia internă este o funcție de stare, adică are o valoare univoc determinată în starea dată, ce nu depinde de procesul prin care sistemul a ajuns în ea. La această concluzie se ajunge și în baza faptului că energia internă reprezintă suma a două funcții de stare W_c și W_p . Evident, energia internă este determinată numai până la o constantă arbitrară aditivă, ceea ce nu influențează legile ce descriu procesele dintr-un sistem macroscopic, deoarece în aceste legi participă variația energiei interne. Dacă sistemul macroscopic nu interacționează cu mediul exterior, adică este izolat, energia sa internă nu se modifică, $U = \text{const}$, deși particulele schimbă energie între ele ca urmare a interacțiunii reciproce. Această afirmație reprezintă legea conservării energiei sistemelor conservative izolate.

Dacă sistemul macroscopic interacționează cu mediul exterior se produce un schimb de energie W astfel că

$$U - U_0 = W, \quad (27.2)$$

unde U, U_0 sunt energiile interne ale sistemului în stările inițială, respectiv finală. Energia W reprezintă suma energiilor schimbate de fiecare particulă a sistemului cu mediul exterior. Evaluarea energiei W ca o astfel de sumă este imposibilă pentru un sistem macroscopic. Energia W se calculează ca suma a două mărimi macroscopice, calitativ diferite, lucrul mecanic A și căldura Q , schimbate de sistem cu mediul exterior

$$W = A + Q.$$

Aceste mărimi fizice se analizează în §§27.3 și 27.4.

27.2. Energiile interne ale gazelor ideale și reale

Energia cinetică medie a unei molecule de gaz este determinată de numărul de grade de libertate i și temperatura T

$$W_{lc} = \frac{i}{2} kT,$$

deci pentru energia cinetică a $N = \nu N_A$ molecule de gaz omogen obținem:

$$W_c = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT \quad (N_A k = R) \quad (27.3)$$

Moleculele gazului ideal nu interacționează la distanță, prin urmare $W_p = 0$. Atunci din egalitățile (27.1), (27.3) urmează *energia internă a gazului ideal*

$$U = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (27.4)$$

Energia potențială de interacțiune dintre moleculele gazului real depinde de distanța medie dintre ele, adică de volumul gazului, $W_p = W_p(V)$. Se știe: lucrul efectuat împotriva forțelor de atracție dintre particule este egal cu creșterea energiei potențiale a sistemului, format din aceste particule; forțele de atracție dintre moleculele gazului real, exercitate normal pe unitatea de suprafață, reprezintă presiunea internă din ecuația Van der Waals, $P_i = \frac{a_v \nu^2}{V^2}$.

Atunci, lucrul elementar efectuat la dilatarea gazului împotriva forțelor de atracție dintre molecule

$$dA = P_i dV = \frac{a_v \nu^2}{V^2} dV,$$

este egal cu variația infinit mică a energiei potențiale

$$dW_p = \frac{a_v \nu^2}{V^2} dV.$$

Integrând ultima egalitate, obținem:

$$W_p = \frac{a_v \nu^2}{V} dV + const. \quad (27.5)$$

Valoarea constantei din (27.5) se determină din condiția următoare: când $V \rightarrow \infty$ gazul satisface modelul gazului ideal și $W_p = 0$. Prin urmare, $const = 0$. În rezultat, pentru *energia internă a gazului real* am obținut expresia:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT - \frac{a_v \nu^2}{V}, \quad (27.6)$$

din care urmează că creșterea energiei interne se produce atunci când crește atât temperatura, cât și volumul gazului. Evident, din (27.6) se obține (27.3), dacă $V \rightarrow \infty$.

27.3. Lucrul mecanic al sistemului termodinamic

Presupunem că sistemul considerat este un gaz, închis într-un cilindru, prevăzut cu un piston mobil (fig.4.11). Vom analiza schimbul de energie ce se produce între gaz și mediul exterior prin intermediul ciocnirilor moleculelor gazului de piston.

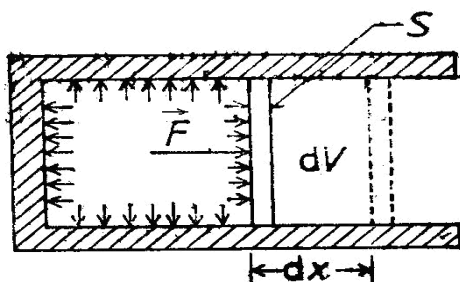


Fig. 4.11

În rezultatul schimbului de impuls dintre moleculele gazului și cele ale pistonului asupra suprafeței lui de arie S acționează forța medie normală F_n . Datorită acțiunii acestei forțe pistonul se deplasează ordonat pe distanța dx în timpul dt , iar volumul gazului variază cu $dV = Sdx$. Deci, gazul efectuează *lucrul mecanic elementar*

$$\delta A = F_n dx = p_s dx = p dV, \quad (27.7)$$

unde $p = \frac{F_n}{S}$ reprezintă presiunea exercitată de gaz asupra pistonului. Acest lucru elementar este efectuat împotriva presiunii externe p_{ex} , exercitate de forțele externe asupra gazului. Într-un proces cvasistatic de variație a volumului gazului, în orice moment, $p = p_{ex}$. La variația volumului gazului în limitele V_1, V_2 lucrul mecanic efectuat de gaz este

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \quad (27.8)$$

Din egalitățile (27.7), (27.8) urmează că la dilatare gazul efectuează lucru pozitiv, iar forțele externe –lucru negativ. La comprimarea gazului lucrul său este negativ, iar al forțelor externe – pozitiv. În continuarea acestui capitol expresia „lucrul gazului” va însemna lucrul său pozitiv la dilatare, iar expresia „lucrul forțelor externe” va însemna lucrul pozitiv al acestor forțe la comprimare. Conform formulelor (27.7), (27.8), în absența câmpurilor de forțe externe, schimbul de energie dintre sistem și corpurile externe se realizează prin lucru mecanic numai în procesul variației volumului sistemului macroscopic considerat. Este important de menționat și faptul, că aceste formule sunt juste pentru orice sisteme macroscopice (corpuri solide, lichide, gaze) la orice variație a volumului lor.

Calculul integralei din egalitatea (27.8) este posibil, dacă se cunoaște dependența presiunii de volum $p = p(V)$. O astfel de dependență se determină din ecuația de stare a sistemului considerat. De exemplu, pentru un gaz ideal din ecuația sa de stare urmează $p = \frac{\nu RT}{V}$, ceea ce ne permite să calculăm lucrul în procese simple:

$$T = const, \quad A_{12} = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (27.9)$$

$$p = const, \quad A_{12} = p\Delta V. \quad (27.10)$$

Expresiile (27.9), (27.10) reflectă faptul cunoscut din mecanică, că lucrul mecanic este o funcție de proces. Lucrul mecanic nu se asociază unei stări a sistemului macroscopic, dar unui proces, în rezultatul căruia sistemul trece dintr-o stare în alta.

Lucrul mecanic, calculat conform relațiilor (27.7), (27.8), este efectuat de forțele de presiune ale sistemului sau ale mediului exterior și de aceea se numește lucru de natură mecanică. În general, asupra particulelor sistemului pot acționa și efectua lucru mecanic câmpuri externe de forțe de altă natură, cum ar fi un câmp electric extern ce acționează asupra particulelor încărcate electric ale sistemului. În acest capitol vom considera numai cazul, în care lucrul mecanic este de natură mecanică.

27.4. Schimb de căldură. Coeficienți calorici

Revenind la exemplul din §27.3 (fig.4.11), constatăm că moleculele gazului din cilindru pot schimba energie cu mediul exterior și prin intermediul ciocnirilor de pereții fixi ai acestuia, deci printr-un proces ce decurge fără variația volumului gazului. Analizând mecanismul acestui schimb de energie, numit și *schimb de căldură*, ajungem la următoarea concluzie: dacă temperatura sistemului este diferită de temperatura corpurilor externe, atunci o parte a energiei interne a sistemului se transmite corpurilor externe, energia internă a căroră crește, sau invers – o parte a energiei interne a corpurilor externe se transmite sistemului, energia internă a căruia crește. Astfel, schimbul de căldură este esențial diferit de lucrul mecanic, efectuat pe contul energiei interne ce se transformă în energie a mișcării mecanice.

Schimbul de căldură se produce între sistemele sau părțile unui sistem cu temperaturi diferite, atât în cazul contactului direct prin convecție, conductibilitate termică, cât și în absența acestui contact prin emisia și absorbția radiației electromagnetice.

Noțiunea de căldură are sens fizic numai în legătură cu procesul de variație a stării sistemului considerat, fiind o caracteristică energetică a acestui proces.

Vom aminti definițiile coeficienților calorici, utilizați pentru a caracteriza schimbul de căldură. *Capacitatea calorică* C este

numeric egală cu cantitatea de căldură necesară pentru a varia cu 1 K temperatura sistemului macroscopic,

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (27.11)$$

Pentru sisteme omogene se introduc *căldura specifică* c și *căldura molară* C_M , egală cu cantitatea de căldură necesară pentru a varia cu 1 K temperatura unei unități de masă, respectiv a unui mol de substanță,

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad (27.12)$$

$$C_M = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{\delta Q}{\frac{m}{M} dT}. \quad (27.13)$$

Din compararea formulelor (27.11) – (27.13) urmează:

$$C = mc = \nu C_M, \quad C_M = cM. \quad (27.14)$$

27.5. Principiul întâi al termodinamicii

Energia W , schimbată de un sistem închis cu mediul exterior se poate scrie, conform celor expuse în § 27.1, sub forma,

$$W = Q + A' \quad (27.15)$$

unde Q este căldura schimbată de sistem cu mediul exterior, iar A' este lucrul mecanic efectuat de corpurile externe asupra sistemului. Deoarece $A' = -A$ unde A reprezintă lucrul sistemului asupra corpurilor externe, relația (27.15) se mai scrie

$$W = Q - A \quad (27.16)$$

În conformitate cu egalitatea (27.2), obținem

$$U - U_0 = Q - A, \quad U - U_0 = Q + A'. \quad (27.17)$$

$$Q = \Delta U + A, \quad \Delta U = Q + A'.$$

Expresiile (27.17) reprezintă *principiul întâi al termodinamicii sub formă integrală*: variația energiei interne a unui sistem macroscopic închis este egală cu suma dintre lucrul mecanic A' efectuat asupra sistemului și căldura schimbată de sistem cu

corpurile externe. Mai putem afirma, că energia internă reprezintă rezerva de energie a unui sistem care, în principiu, poate fi cedată sub formă de căldură sau prin efectuarea de către sistem a lucrului mecanic.

Dacă procesul termodinamic este elementar, *principiul întâi în formă diferențială se scrie*

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad \delta U = dU + \delta A'. \quad (27.8)$$

Notațiile δQ , $\delta A'$, δA accentuează faptul că mărimile respective sunt funcții de proces, nefiind diferențiale totale.

Presupunem că sistemul considerat este izolat adiabatic, adică nu poate schimba energie sub formă de căldură ($\delta Q = 0$). Atunci relația (27.8) devine

$$dU = -\delta A, \quad (27.9)$$

ceea ce înseamnă că sistemul poate efectua lucru mecanic pe contul energiei sale interne.

Dacă sistemul efectuează un proces ciclic atunci ,

$$dU = 0, \quad dU = \delta A.$$

Ultima egalitate ne conduce la concluzia imposibilității realizării unei mașini termice, care ar putea să efectueze lucru mecanic, într-un proces ciclic, fără să primească căldură din exterior (*perpetuum mobile de speța întâi*).

§28. Transformări simple ale gazelor.

Proces adiabatic. Procese politrope

Vom considera sisteme termodinamice pentru care $U = U(T, V)$,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV, \quad (28.1)$$

și principiul întâi al termodinamicii se scrie

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV. \quad (28.2)$$

28.1. Procese izocore ($V = \text{const}$).

Pentru un proces izocor egalitatea (28.2) se scrie

$$(\partial Q)_V = (dU)_V, \quad U - U_0 = Q_V. \quad (28.3)$$

Într-un proces izocor variația energiei interne a sistemului este egală cu căldura schimbată de acesta cu mediul exterior. Atunci, conform definiției (27.13), căldura molară la volum constant C_{MV} se scrie

$$C_{MV} = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (28.4)$$

În particular, dacă sistemul considerat este un gaz ideal, pentru care $U = \frac{i}{2} \nu RT$, căldura molară la volum constant devine:

$$C_{MV} = \frac{i}{2} R. \quad (28.5)$$

Constatăm că C_{MV} nu depinde de natura gazului, dar depinde numai de numărul de grade de libertate ale unei molecule de gaz. Din relațiile (28.4), (28.5) rezultă următoarele formule de calcul ale variației energiei interne a gazului ideal

$$\begin{aligned} dU_{id} &= C_{MV} \nu dT = \frac{i}{2} R \nu dT, \\ \Delta U_{id} &= \int_{T_1}^{T_2} C_{MV} \nu dT = C_{MV} \nu \Delta T = \frac{i}{2} R \nu \Delta T, \end{aligned} \quad (28.6)$$

aplicabile pentru orice proces termodinamic.

Analiza minuțioasă a forțelor de atracție dintre moleculele gazului real conduce la concluzia că aceste forțe influențează mișcarea termică doar a unui număr relativ mic de molecule din vecinătatea pereților recipientului. Cu un înalt grad de precizie se poate considera, că cantități egale de gaz ideal și real, aflate la aceeași temperatură, posedă aceeași energie cinetică a mișcării haotice a moleculelor. Totodată, într-un proces izocor energia potențială de interacțiune dintre moleculele gazului real se menține constantă,

$$W_p = W_p(V) = \text{const}, \text{ adică } \Delta W_p = 0.$$

Prin urmare,

$$(C_{MV})_{\text{real}} = (C_{MV})_{\text{id}},$$

$$dU_{\text{real}} = dU_{\text{id}} = \frac{i}{2} R \nu dT, \quad \Delta U_{\text{real}} = \frac{i}{2} R \nu \Delta T.$$

(28.6' ○○○)

28.2. Procese izobare ($p = \text{const}$)

Pentru un proces izobar principiul întâi își menține aspectul dat de egalitatea (28.2) și căldura molară la presiune constantă se scrie:

$$C_{Mp} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (28.7)$$

Să calculăm C_{Mp} pentru un gaz ideal, folosind egalitățile:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{i}{2} \nu R, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0,$$

$$pV = \nu RT \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\nu R}{p}.$$

Obținem cunoscuta relație a lui Maier

$$C_{Mp} = \frac{i}{2} R + R = C_{MV} + R, \quad (28.8)$$

din care urmează: constanta universală a gazelor R este numeric egală cu lucrul efectuat într-un proces izobar de 1 mol de gaz ideal, temperatura căruia variază cu 1K.. Substituind relația (28.8) în (28.7), obținem cantitatea de căldură schimbată de gazul ideal într-un proces izobar:

$$\delta Q = (C_{MV} + R) \nu dT = \left(\frac{i}{2} R + R \right) \nu dT.$$

Să obținem relația dintre C_{MV} și C_{Mp} pentru gaze reale, folosind expresia pentru energia internă a gazelor reale, ecuația Van der Waals și derivatele calculate pe baza lor:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{i}{2} \nu RT - \frac{a_\nu \nu^2}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{a_\nu \nu^2}{V^2}, \\
 \left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right) (V - \nu b_\nu) &= \nu RT \Rightarrow \\
 \left[-\frac{2a_\nu \nu^2}{V^3} (V - \nu b_\nu) + \left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right) \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p &= \nu R, \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p &= \frac{\nu R}{\left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right) - \frac{2a_\nu \nu^2}{V^3} (V - \nu b_\nu)}.
 \end{aligned}$$

Aceste derivate parțiale și egalitatea (28.4) se substituie în (28.7):

$$C_{Mp} = C_{MV} + \frac{1}{\nu} \left[p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right] \frac{\nu R}{\left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right) - \frac{2a_\nu \nu^2}{V^3} (V - \nu b_\nu)}.$$

Numărătorul și numitorul termenului al doilea se împart la $\left[p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right]$. Obținem,

$$C_{Mp} = C_{MV} + \frac{R}{1 + \frac{2a_\nu \nu^2 (V - \nu b_\nu)}{V^3 \left(p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} \right)}}.$$

Conform ecuației Van der Waals, $p + \frac{a_\nu \nu^2}{V^2} = \frac{\nu RT}{V - \nu b_\nu}$. Atunci ultima egalitate devine

$$C_{Mp} = C_{MV} + \frac{R}{1 - \frac{2a_\nu \nu^2 (V - \nu b_\nu)^2}{\nu RT}},$$

$$C_{Mp} = C_{MV} + \frac{R^2 T}{RT - 2a_v v (V - v b_v)^2}. \quad (28.9)$$

La temperaturi suficient de înalte, când gazul real se comportă ca un gaz ideal, $RT \gg 2v a_v (V - v b_v)^2$, relația (28.9) trece în relația lui Mayer.

28.3. Deficiențele teoriei clasice a coeficienților calorigici ai gazelor ideale

Din formulele (28.5), (28.8) urmează că căldurile molare ale gazului nu depind de temperatură. Legea echipartiției energiei după grade de libertate, în baza căreia au fost obținute aceste formule (a se vedea §24), nu presupune dependența numărului de grade de libertate de temperatură. Experimental se constată, că doar coeficienții calorigici ai gazelor ideale monoatomice sunt independenți de temperatură. Coeficienții calorigici ai gazelor, moleculele cărora sunt compuse din doi și mai mulți atomi, cresc odată cu temperatura. De exemplu, pe fig.4.12 este reprezentată dependența calitativă de temperatură a capacității calorice la volum constant a hidrogenului.

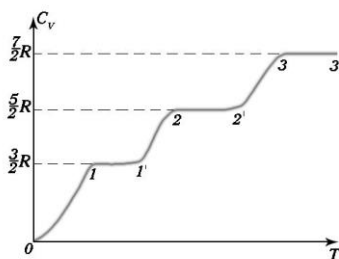


Fig.4.12

Analiza dependențelor de temperatură a coeficienților calorigici ai gazelor cu molecule formate din doi și mai mulți atomi ne conduce la următoarele concluzii:

- 1) la temperaturi apropiate de 0K , $C_{MV} \rightarrow 0$;

2) pe un anumit interval de temperaturi joase ce nu depășesc 10^1 K căldura molară la volum constant se menține constantă și egală cu $\frac{3}{2}R$; moleculele efectuează numai mișcări de translație;

3) pe un anumit interval de temperaturi mai înalte ($\sim 10^1$ K $\div 10^2$ K) C_{MV} se menține constantă și egală cu $\frac{5}{2}R$; mișcările de translație i se adaugă și mișcarea de rotație a moleculelor;

4) la temperaturi înalte ($\sim 10^2$ K $\div 10^3$ K) căldura molară la volum constant își menține valoarea $\frac{7}{2}R$; mișcărilor de translație și rotație li se adaugă mișcarea oscilatorie a moleculelor.

5) trecerea de la o valoare la alta a căldurii molare se produce monoton, în contradicție cu legea echipartiției energiei după grade de libertate, conform căreia numărul de grade de libertate i este întreg.

Constatăm, că rezultatele teoretice clasice diferă considerabil de rezultatele experimentale în cazul moleculelor bi- și poliatomice de gaz, teoria coeficienților calorici bazată pe fizica statistică clasică conduce la divergențe serioase cu datele experimentale. Anularea legăturii rigide dintre atomii moleculei, adică includerea gradelor de libertate ale mișcării oscilatorii nu duce la lichidarea acestor divergențe. Deficiențele teoriei clasice a coeficienților calorici sunt legate, în temei, de utilitatea limitată a legii echipartiției energiei după grade de libertate.

Dependența coeficienților calorici ai gazelor de temperatură este explicată în cadrul fizicii cuantice în baza cuantificării energiilor, ce revin mișcărilor de rotație și oscilatorii ale moleculelor (a se vedea cap.VI, partea III).

28.4. Procese adiabatice

Pentru *procesul adiabetic*, în decursul căruia sistemul nu schimbă căldură cu mediul exterior, $\delta Q \equiv 0$, principiul întâi se scrie

$$-dU = \delta A, \quad -\Delta U = A_{12}. \quad (28.10)$$

Substituind egalitatea (28.6) în (28.10) obținem

$$-C_{MV}\nu dT = \delta A, \quad -C_{MV}\nu dT = p dV. \quad (28.11)$$

Sistemul, în care are loc un proces adiabatic efectuează lucru mecanic numai pe contul energiei sale interne, răcindu-se la dilatare și încălzindu-se la comprimare. Vom deduce relația dintre parametrii p, V, T ce descriu un proces adiabatic, realizat de un gaz ideal. Ecuația de stare a gazului ideal se scrie în formă diferențială

$$\nu R dT = p dV + V dp,$$

și se împarte la egalitatea a doua din (28.11):

$$-\frac{\nu R dT}{C_{MV} \nu dT} = \frac{p dV + V dp}{p dV}.$$

Ținând cont de relația lui Mayer (28.8), obținem

$$-\frac{C_{MP}}{C_{MV}} + 1 = 1 + \frac{V dp}{p dV}.$$

În egalitatea obținută se separă variabilele și se introduce *indicele adiabatic* γ .

$$\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} > 1.$$

Obținem

$$-\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p}.$$

Rezultatul integrării acestei egalități în limitele arbitrare p_1, p_2 , respectiv V_1, V_2

$$-\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad p V^\gamma = \text{const.} \quad (28.12)$$

reprezintă *ecuația Poisson*, ce exprimă dependența presiunii de volum într-un proces adiabatic al gazului ideal. Această ecuație mai are două forme ce se obțin ușor, substituind ecuația de stare a gazului ideal în ultima relație (28.12):

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}, \quad T V^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (28.13)$$

În coordonatele p, V adiabata reprezintă o curbă monoton descrescătoare. Dacă se compară adiabata și izoterma ce trec prin același punct, întotdeauna adiabata este mai înclinată (fig. 4.13).

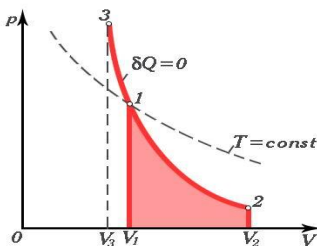


Fig.4.13

Ne convingem de aceasta comparând tangentele celor două curbe:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\gamma \frac{p}{V}, \left(\frac{dp}{dV}\right)_{izot} = -\frac{p}{V}, \quad \gamma > 1, \quad \gamma \frac{p}{V} > \frac{p}{V}.$$

Înclinarea mai mare a adiabatei se explică astfel: variația presiunii $p = nkT$ la comprimarea (dilatarea) adiabatică are loc din cauza creșterii (descreșterii) atât a concentrației n , cât și a temperaturii T .

Procesul adiabatic prezintă un interes practic deosebit. Cu un grad suficient de precizie se consideră adiabatic procesele de dilatare sau comprimare rapidă a gazelor. Evident, procesul adiabatic și procesul izoterm cu care se compară, reprezintă cazurile limită al izolației termice perfecte a sistemului considerat, și respectiv, al contactului termic ideal dintre sistem și termostat.

28.5. Procese politrope

Procesele simple ale gazelor ideale sunt descrise de ecuații, cunoscute din cursul liceal. Ecuația procesului adiabatic realizat de gaze ideale a fost dedusă în §28.4. Toate aceste relații se generalizează sub forma

$$pV^n = \text{const}, \quad (28.14)$$

unde n este o mărime adimensională, constantă pentru fiecare proces, numită *indice politropic*, valorile căruia pot varia de la $-\infty$ la $+\infty$. Ecuația (28.14) este numită *ecuația politropei gazului ideal*. Pentru procesele izobar, izoterm și adiatic valorile lui n sunt evidente

Procesul	n
izobar	0
izoterm	1
adiabat	γ
izocor	$\pm\infty$

Pentru a ne convinge că pentru procesul izocor $n = \pm\infty$ vom scrie ecuația (28.14) în forma

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n, \quad p_1^{\frac{1}{n}} V_1 = p_2^{\frac{1}{n}} V_2.$$

Condiția $V_1 = V_2$ impune pentru n valoarea $n = \pm\infty$. Pe fig. 4.14 sunt reprezentate, în coordonatele p, V , graficele acestor patru procese.

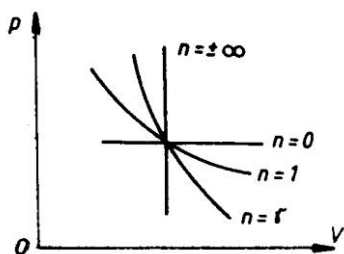


Fig. 4.14

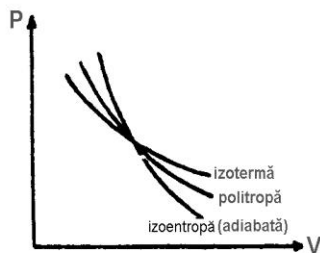


Fig. 4.15

Într-un proces, descris de ecuația (28.14), pot varia toți trei parametrii p, V, T . Prin urmare, ecuația (28.14) mai are două forme care se obțin, substituind în (28.14) ecuația de stare a gazului ideal:

$$TV^{n-1} = \text{const.}, \quad T^n p^{1-n} = \text{const.} \quad (28.15)$$

În general, un proces descris de ecuația politropei se realizează cu schimb de căldură între gazul ideal considerat și

mediul exterior. Pentru un mol de gaz ideal această căldură se scrie:

$$\delta Q = C_v dT + p dV$$

Diferențierea primei egalități din (28.15) ne permite să obținem o relație pentru $p dV$:

$$V^{n-1} dT + T(n-1)V^{n-2} dV = 0$$

$$dV = \frac{V dT}{(1-n)T}, \quad p dV = \frac{pV}{(1-n)T} dT.$$

Deoarece $\frac{pV}{T} = R$, obținem

$$p dV = \frac{R}{1-n} dT, \quad \delta Q = (C_v - \frac{R}{n-1}) dT. \quad (28.16)$$

Din definiția indicelui adiabatic γ și relația lui Maier (28.8) urmează:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}, \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Substituim expresia obținută pentru C_v în egalitatea a doua

$$\delta Q = (\frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1}) dT = R \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} dT. \quad (28.16)$$

Am obținut că capacitatea calorică a gazului ideal într-un proces, ce satisface ecuația politropei, este o mărime constantă, independentă de parametrii de stare

$$C_n = \frac{\delta Q}{dT} = R \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} = \text{const} . \quad (28.17)$$

Rezultatul obținut (28.17) permite definirea procesului politrop: se numește *proces politrop al gazului ideal* un astfel de proces, în care capacitatea calorică (căldura specifică, căldura molară) este invariabilă, $C_n = \text{const}$.

Capacitatea calorică C_n are valori diferite în fiecare proces politrop concret, ce depind de indicele politropei n .

$$1) p = \text{const}, n = 0, C_n = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma C_v = C_p, \quad \delta Q = C_p dT.$$

$$2) V = \text{const}, n = \pm\infty, C_n = \frac{R}{\gamma - 1} = C_v, \quad \delta Q = C_v dT.$$

$$3) T = \text{const}, n = 1, C_n = \pm\infty, \quad \delta Q = \delta A.$$

$$4) Q = 0, n = \gamma, C_n = 0.$$

Din formula (28.17) urmează că pentru procesul politrop cu $1 < n < \gamma$ capacitatea calorică este negativă, $C_n < 0$. În acest proces, reprezentat pe fig.4.15, gazul care se dilată efectuează un lucru mai mare decât căldura primită. Gazul utilizează pentru efectuarea lucrului și o parte din energia sa internă, deci se răcește, deși primește căldură din exterior.

Procesele politrope se folosesc în tehnică pentru reprezentarea diverselor cicluri ale mașinilor termice. De aceea este important să se determine lucrul efectuat într-un proces politrop. Lucrul efectuat într-un astfel de proces de gazul ideal, volumul căruia variază de la V_1 la V_2 se calculează, recurgând la ecuația politropei

$$p = \frac{p_1 V_1^n}{V^n}.$$

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^n \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (28.18)$$

Se mai obțin câteva expresii pentru A_{12} , dacă se folosesc ecuațiile $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$, $T_1^n p_1^{1-n} = T_2^n p_2^{1-n}$, $p_1 V_1 = \nu R T_1$,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \frac{\nu R T_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \\ &= \frac{\nu R T_1}{n-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{\nu R}{n-1} (T_1 - T_2) = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2). \end{aligned}$$

Este simplu de obținut din aceste expresii formulele lucrului mecanic în procesele izobar și adiabatic. Pentru a obține formula de calcul a lucrului într-un proces izoterm, calculăm limita părții drepte a formulei (28.18):

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = -\ln \frac{V_1}{V_2} = \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Deci, $A_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$

§ 29. Principiul al doilea al termodinamicii

În acest paragraf se vor recapitula noțiunile și relațiile, cunoscute din cursul preuniversitar, referitoare la procese reversibile și ireversibile, procese ciclice, ciclul Carnot, unele formulări ale principiului al doilea al termodinamicii. În continuare se vor introduce noi noțiuni termodinamice, necesare pentru înțelegerea mai profundă a proceselor termodinamice, a sensului în care decurg, cât și pentru noi formulări ale principiului al doilea.

29.1. Procese reversibile și ireversibile

Cunoaștem clasificarea proceselor în procese de echilibru, cvasistatice și procese de neechilibru, necvasistatice. Principiul întâi este valabil pentru ambele tipuri de procese. Formularea principiului al doilea necesită o nouă clasificare în procese reversibile și procese ireversibile.

Procesele care se pot realiza și în sens invers, astfel că la revenirea sistemului în starea inițială nu se produce nici o schimbare în mediul exterior se numesc *procese reversibile*. Procesele care nu satisfac această condiție se numesc *procese ireversibile*. Astfel, un proces reversibil se poate produce și în sens invers, sistemul trecând prin aceleași stări ca în procesul direct, dar în consecutivitate inversă. Procesele reversibile sunt în mod necesar de echilibru, lente, dar nu orice proces de echilibru este și reversibil. De exemplu, procesul cvasistatic de mișcare uniformă a unui corp pe o suprafață orizontală sub acțiunea forțelor de

tracțiune și de frecare, ce se echilibrează reciproc, este un proces ireversibil. Un exemplu de proces reversibil sunt oscilațiile libere armonice, efectuate în vid, în absența forțelor de rezistență, de un pendul perfect elastic. În condițiile indicate pendulul elastic este un sistem conservativ, oscilațiile lui nu provoacă variația energiei mișcării termice a particulelor sistemului, orice stare se repetă după o perioadă. Generalizarea datelor experimentale conduce la concluzia că o altă condiție a reversibilității unui proces o constituie absența fenomenelor de frecare, inclusiv de frecare internă (vâscozitate) – fenomene disipative, care se produc într-un singur sens.

Un proces, însoțit de schimb de căldură, poate fi reversibil numai în cazul dacă primind căldură în procesul direct și cedând-o în procesul invers, sistemul considerat are una și aceeași temperatură, egală cu temperatura constantă a sursei (termostat). Strict vorbind, în procesul direct temperatura sistemului este mai mică decât a sursei cu o mărime infinit mică, iar în procesul invers este mai mare decât a sursei de asemenea cu o mărime infinit mică. Fie că această condiție nu se îndeplinește. Atunci în procesul direct sistemul cu temperatura T_1 primește căldură de la sursa cu temperatura T_0 , $T_1 < T_0$. În procesul invers, pentru ca să cedeze sursei căldură, sistemul trebuie să aibă o temperatură $T_2 > T_0$. Prin urmare, în procesele direct și invers sistemul trece prin stări diferite, deci procesul analizat nu este reversibil. În concluzie afirmăm: unicul proces reversibil, însoțit de schimb de căldură cu un termostat, este procesul izotermic, ce decurge la temperatura termostatului.

Accentuăm următoarele proprietăți generale ale unui sistem în care decurge un proces reversibil: există o diferență infinit mică între forțele exterioare și cele de reacțiune din partea sistemului; în procesul reversibil direct lucrul mecanic efectuat de sistem este maxim; lucrul mecanic în procesul direct coincide numeric cu lucrul în procesul invers.

Strict vorbind, toate procesele reale sunt ireversibile. Procesele reversibile sunt idealizări ale proceselor reale. Dar există

posibilitatea ca, în principiu, procesele reale să se apropie oricât de mult de procesele reversibile.

29.2. Procese ciclice. Ciclul Carnot

Procesul, în urma căruia sistemul revine în starea inițială se numește *proces ciclic*. Un ciclu reversibil se reprezintă pe diagrama $p-V$ printr-o curbă închisă (fig.4.16). Aria delimitată de această curbă este egală numeric cu lucrul mecanic efectuat de sistem asupra corpurilor externe, dacă sensul de parcurs este cel din fig.4.16 (ciclul direct). Aceeași arie este egală numeric cu lucrul mecanic efectuat de corpurile externe asupra sistemului, dacă sensul de parcurs este invers celui din fig.4.16 (ciclul invers).

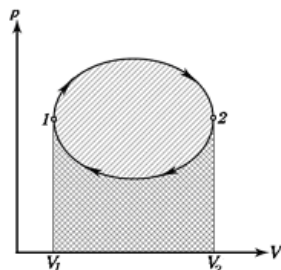


Fig.4.16

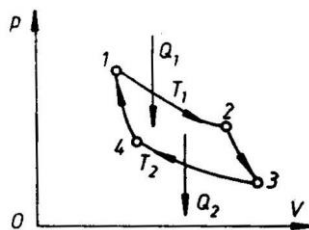


Fig.4.17

Scriem principiul întâi pentru ambele porțiuni în care a fost împărțit ciclul direct de pe fig. 4.16

$$Q_1 = (U_2 - U_1) + A_{12}, \quad Q_1 > 0, \quad A_{12} > 0,$$

$$Q_2 = (U_1 - U_2) + A_{21}, \quad Q_2 < 0, \quad A_{21} < 0.$$

Adunând ambele egalități, obținem

$$Q_1 + Q_2 = A_{12} + A_{21}.$$

Notăm lucrul total efectuat de sistem într-un ciclu $A = A_{12} + A_{21}$

și $Q_2 = -|Q_2|$. Obținem relația $Q_1 - |Q_2| = A$ care permite calculul *randamentului ciclului direct*,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} < 1. \quad (29.1)$$

Din egalitatea (29.1) rezultă:

1) într-un proces ciclic căldura nu poate fi transformată integral în lucru mecanic, $Q \rightarrow A$, $A < Q$. Totodată, numeroase rezultate experimentale ne conving că lucrul mecanic poate fi transformat integral în căldură, $A \rightarrow Q$, $Q = A$.

2) sistemul ce efectuează un ciclu, numit și corp sau substanță de lucru, este pus în contact, în mod obligatoriu, cu două surse de căldură – sursa caldă cu temperatura T_1 de la care primește căldura Q_1 și sursa rece cu temperatura T_2 , căreia îi cedează căldura Q_2 .

Rezultatele expuse, obținute de inginerul și fizicianul S. Carnot au dat un răspuns negativ la întrebarea dacă ar fi posibil de construit o mașină termică, care să efectueze lucru mecanic fără a fi pusă în contact cu sursa rece de căldură, $Q_2 = 0$, $\eta = 1$. Din punct de vedere practic o astfel de mașină termică ar fi echivalentă cu un perpetuum mobile, deoarece ar permite efectuarea lucrului mecanic pe contul rezervelor practic nelimitate ale energiei interne, conținute în atmosfera terestră, apa oceanelor, în interiorul Pământului, etc. Chimistul W.Ostwald a numit mașina termică cu $\eta = 1$ *perpetuum mobile de speța a doua*.

Analizând posibilitățile de mărire a randamentului mașinilor termice, Carnot a ajuns la următoarele concluzii, numite *teorema Carnot*:

1) randamentele tuturor mașinilor termice reversibile, ce funcționează în condiții identice (la aceleași temperaturi ale surselor calde și ale surselor reci) sunt aceleași;

2) randamentul tuturor mașinilor termice ireversibile este mai mic decât randamentul mașinilor termice reversibile, ce funcționează în condiții identice.

Conform teoremei Carnot proprietățile corpului de lucru nu influențează randamentul ciclului. Unicul ciclu, reversibil prin definiție, este ciclul Carnot (fig.4.17), format din două procese izoterme și două procese adiabate. Folosind randamentul acestui ciclu, teorema Carnot se scrie

$$\eta_{irev} < \eta_c, \quad \eta_{rev} = \eta_c, \quad (9.2)$$

unde η_c , η_{rev} , η_{irev} sunt randamentele ciclului Carnot, respectiv ciclului arbitrar reversibil și ciclului arbitrar ireversibil.

Să calculăm *randamentul ciclului Carnot*. În conformitate cu teorema Carnot, randamentul depinde de temperaturile surselor, cu care corpul de lucru schimbă căldurile Q_1 și respectiv Q_2 egale cu lucrul mecanic în procesul 1-2, respectiv 3-4.

$$Q_1 = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad |Q_2| = |A_{34}| = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Scriem ecuațiile adiabatelor 2-3 și 4-1

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

și împărțim prima ecuație la a doua,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Substituim expresiile pentru $Q_1, |Q_2|$ în definiția (29.1) și luând în considerație ultima egalitate, obținem:

$$\eta = \frac{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}, \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (29.3)$$

Astfel, am obținut că randamentul ciclului Carnot depinde numai de temperaturile surselor de căldură și crește odată cu micșorarea raportului $\frac{T_2}{T_1}$.

29.3. Principiul al doilea al termodinamicii

Rezultatele și concluziile la care a ajuns S. Carnot (an.1824) au anticipat cu câteva zeci de ani și au constituit punctul de plecare pentru formulările date de R. Clausius (an.1850) și W. Thomson (an.1851) principiului al doilea al termodinamicii. Strict vorbind, teorema Carnot reprezintă *prima formulare a principiului al doilea*

al termodinamicii: pentru ca o mașină termică să lucreze ciclic, producând lucru mecanic, sunt necesare două surse de căldură, sursa caldă cu temperatura T_1 și sursa rece cu $T_2 < T_1$; atunci randamentul mașinii termice este:

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} . \quad (29.4)$$

Egalitatea este satisfăcută de randamentul mașinii termice reversibile, iar inegalitatea de randamentul mașinii termice ireversibile.

Formularea *principiului al doilea, dată de R. Clausius*: este imposibilă trecerea spontană (de la sine) a căldurii de la corpuri cu temperaturi mai joase la corpuri cu temperaturi mai înalte. În sens mai general, legat de funcționarea mașinilor termice, această formulare se modifică prezentându-se astfel: este imposibilă construirea unei mașini termice periodice, unicul rezultat al funcționării căreia ar fi transferul de căldură de la un corp rece la un corp mai cald.

Evident, această formulare nu se referă la mașina frigorifică, care transportă căldura de la un corp mai rece la altul mai cald, dar acest proces decurge concomitent cu efectuarea lucrului mecanic de către corpuri externe, adică transportul este însoțit de anumite schimbări în mediul exterior.

Formularea *principiului al doilea, dată de W. Thomson*: sunt imposibile procesele termice, unicul rezultat al cărora ar fi transformarea integrală în lucru mecanic a căldurii primite.

Ulterior, M. Planck a modificat formularea lui W. Thomson, aplicând-o funcționării mașinilor termice. *Formularea Thomson – Planck*: este imposibil procesul periodic al cărui unic rezultat ar fi transformarea integrală în lucru mecanic a căldurii primite.

În prezent sunt cunoscute sute de formulări echivalente ale principiului al doilea. Acest principiu este legat de interpretarea pe baza fizicii statistice a proceselor termodinamice, de aceea nu are un sens intuitiv evident și clar, ca principiul întâi al termodinamicii. În general, principiul al doilea stabilește sensul cel mai probabil de desfășurare a proceselor dintr-un sistem

macroscopic. Pentru a caracteriza acest sens se introduce o nouă funcție de stare, numită entropie. Folosind noțiunea de entropie se obține o expresie matematică a principiului al doilea al termodinamicii.

§30. Entropia. Interpretarea statistică a entropiei

30.1. Călduri reduse. Inegalitatea Clausius

Teorema Carnot se exprimă prin inegalitatea

$$\frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

în care semnul egalității se referă la orice ciclu reversibil, iar al inegalității—la orice ciclu ireversibil. Pentru a evita repetările ulterioare, menționăm că această explicație se referă la toate inegalitățile din acest paragraf. Din inegalitatea scrisă urmează

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} \leq 0.$$

În inegalitățile scrise $Q_1, |Q_2|$ reprezintă căldura primită, respectiv valoarea absolută a căldurii cedate de sistem. În cele ce urmează vom considera că pe toate porțiunile unui ciclu corpul de lucru doar primește anumite cantități de căldură, considerate mărimi algebrice pozitive sau negative ($Q_1 > 0, Q_2 < 0$). Atunci ultima inegalitate se scrie

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (30.1)$$

Conform terminologiei introduse de R. Clausius, raportul dintre cantitatea de căldură primită de sistem de la un termostat către temperatura acestui termostat este numit *căldură redusă*. Din relația (30.1) urmează că în procesul efectuării unui ciclu de către un sistem macroscopic suma căldurilor reduse nu poate fi mai mare decât zero. Generalizând relația (30.1) pentru cazul în care sistemul efectuează un ciclu, fiind în contact cu N termostate, obținem

$$\sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{T_k} \leq 0 . \quad (30.2)$$

Dacă condiția că sursele de căldură sunt termostate nu se îndeplinește, atunci fiecare proces de primire a căldurii de către sistem se divizează în procese elementare, astfel încât în decursul fiecărui proces elementar temperatura sursei să fie constantă. În rezultat, ajungem la următoarea inegalitate

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (30.3)$$

în care integrala se calculează de-a lungul întregului ciclu. Fiecare din relațiile (30.2), (30.3) poartă denumirea de *inegalitatea Clausius* pentru un sistem macroscopic ce efectuează un proces ciclic.

30.2. Entropia ca funcție de stare. Legea variației entropiei sistemului izolat

Să calculăm suma căldurilor reduse pentru un proces ciclic reversibil arbitrar, divizat de stările 1 și 2 în ramurile I și II (fig.4.18). Pentru acest proces relația (30.3) se scrie,

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (30.4)$$

(I) (II)

Prima integrală corespunde trecerii sistemului din starea 1 în starea 2 pe ramura I, a doua integrală – trecerii sistemului din starea 2 în starea 1 pe ramura II. În virtutea reversibilității ciclului, la schimbarea sensului parcurgerii ramurii se schimbă și semnul căldurii reduse, ce îi corespunde,

$$-\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_2^1 \frac{\delta Q}{T}.$$

(II) (II)

Egalitatea (30.4) devine

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} - \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (30.5)$$

(I) (II) (I) (II)

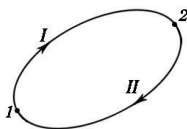


Fig.4.18

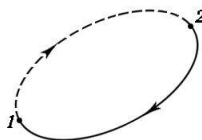


Fig.4.19

Rezultatul obținut (30.5) este extrem de important: suma căldurilor reduse, primite de un sistem termodinamic într-un proces reversibil de trecere din starea 1 în starea 2, nu depinde de acest proces, dar depinde numai de stările 1 și 2. Ne convingem de justetea egalității (30.5) analizând trecerea gazului ideal din starea 1 în starea 2 printr-un proces arbitrar reversibil. În conformitate cu principiul întâi scriem

$$\left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \nu C_{MV} \frac{dT}{T} + \frac{p dV}{T}. \quad (30.6)$$

Raportul $\frac{p}{T}$ se substituie din ecuația de stare,

$$\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V}, \quad \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \nu \left(C_{MV} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right).$$

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu \left(\int_{T_1}^{T_2} C_{MV} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V} \right) = \nu \left(C_{MV} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

(rev)

Observăm că suma căldurilor reduse primite de gazul ideal în procesul reversibil 1 – 2 nu depinde de caracterul concret al acestui proces, dar depinde numai de parametrii ce caracterizează stările 1

și 2. Dacă gazul ideal efectuează un proces reversibil *ciclic*, atunci $T_1 = T_2$, $V_1 = V_2$ și din ultima relație obținem

$$\oint_{rev} \frac{\delta Q}{T} \equiv 0.$$

Din acest rezultat urmează că expresia de sub integrală reprezintă o diferențială totală. Astfel, căldura redusă primită de sistem într-un proces elementar reversibil $\frac{\delta Q}{T}$ reprezintă diferențiala totală a unei funcții de stare, numită *entropie* și notată S :

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \Rightarrow \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1 = \Delta S . \quad (30.7)$$

(rev)

Variația infinit mică a entropiei este egală cu raportul dintre căldura elementară schimbată de sistem într-un proces reversibil către temperatura sursei de căldură. (Amintim că temperaturile corpurilor ce schimbă căldură într-un proces reversibil diferă cu o mărime infinit mică.) Relațiile (30.7) deseori sunt considerate definiții ale variației entropiei, deși aceste relații pot fi deduse pe baza principiilor fizicii statistice.

În continuare, să calculăm suma căldurilor reduse primite de sistem într-un proces ciclic ireversibil, divizat de stările 1 și 2 în două ramuri, una dintre care este ireversibilă, iar cealaltă – reversibilă (fig.4.19). În acest caz inegalitatea (30.3) se scrie

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} < 0 .$$

(irev) (rev)

În conformitate cu egalitatea a doua (30.7) integrala a doua din această inegalitate reprezintă variația entropiei

$$\int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2 .$$

(rev)

Atunci,

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + (S_1 - S_2) < 0, \quad S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (30.8)$$

(irev) (irev)

Scriem împreună relațiile (30.7) și (30.8),

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (30.9)$$

unde semnele egalității și inegalității revin oricărui proces reversibil, respectiv ireversibil, de trecere a sistemului considerat din starea 1 în starea 2. Evident, inegalitatea (30.9) se poate scrie pentru un proces elementar,

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (30.10)$$

Considerăm un sistem izolat, $\delta Q = 0$. Atunci,

$$dS \geq 0, \quad \Delta S \geq 0. \quad (30.11)$$

Fiecare din relațiile (30.11) reprezintă *expresia matematică a principiului al doilea al termodinamicii*, pentru care putem da o nouă formulare: în decursul unui proces spontan, ce are loc într-un sistem izolat, entropia sistemului rămâne constantă, dacă procesul este reversibil și crește, dacă procesul este ireversibil.

Expresiile (30.11) sunt valabile și pentru procesele ce au loc într-un sistem izolat adiabetic, $\delta Q \equiv 0$: entropia sistemului izolat adiabetic poate doar să crească dacă în sistem se realizează un proces ireversibil și rămâne constantă dacă procesul este reversibil. Procesul adiabetic reversibil, pentru care $\Delta S = 0$, mai este numit și izoentrop.

Variația entropiei unui sistem închis poate fi pozitivă, negativă sau nulă. Dacă sistemul realizează un proces în care cedează căldură, $\delta Q < 0$, atunci $\delta S < 0$, iar dacă primește căldură, $\delta Q > 0$, atunci $\delta S > 0$. Dacă procesul este ciclic, atunci variația entropiei pe întregul ciclu este nulă, însă pe parcurs, în mod obligatoriu, entropia a crescut pe unele porțiuni ale ciclului, iar pe altele s-a micșorat.

30.3. Analiza proceselor termodinamice cu ajutorul entropiei

În multe cazuri, analiza proceselor termodinamice cu ajutorul entropiei, folosind diagrama T-S, este mult mai simplă și conduce pe o cale mai scurtă la rezultate importante.

Considerăm un proces arbitrar reversibil, reprezentat pe diagrama T-S prin curba DE (fig.4.20).

Conform egalității (30.10), avem

$$\delta Q = T dS . \quad (30.12)$$

Căldura elementară δQ se reprezintă pe diagrama T-S prin aria hașurată de pe fig.4.20. Atunci aria delimitată de curba DE, ordonatele coborâte din capetele ei și porțiunea de abscisă dintre ele este numeric egală cu căldura schimbată de sistem cu mediul exterior în procesul considerat,

$$Q = \int_1^2 \delta Q = \int_{S_1}^{S_2} T dS . \quad (30.13)$$

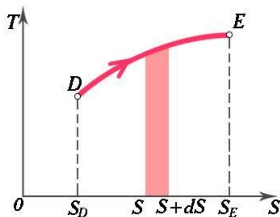


Fig.4.20

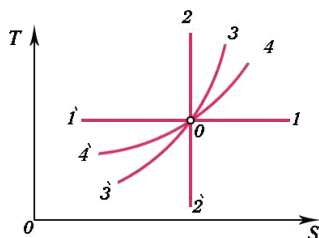


Fig.4.21

Din această interpretare geometrică devine evident, că căldura nu este o funcție de stare, valoarea ei depinde de procesul prin care sistemul trece dintr-o stare în alta.

Vom analiza relațiile dintre T și S în procesele reversibile simple și adiabatic, realizate de gazul ideal, ce formează un sistem închis. Din egalitățile (30.6) și (30.10) rezultă

$$dS = \nu \left(C_{MV} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) = \nu [C_{MV} d(\ln T) + R d(\ln V)] . \quad (30.14)$$

Pentru gazul ideal $\frac{pV}{T} = \text{const}$,

$\ln p + \ln V - \ln T = \text{const}$, $d(\ln p) + d(\ln V) - d(\ln T) = 0$,
și expresia (30.14) se poate scrie sub forma

$$dS = \nu [(C_{MV} + R)d(\ln T) - Rd(\ln p)] = \nu \left(C_{MP} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right). \quad (30.15)$$

Procesele analizate sunt reprezentate pe diagrama $T-S$ (fig.4.21) și pentru fiecare din ele starea inițială a gazului corespunde punctului 0:

1. Dreapta 1^1-1 , ce trece prin punctul 0 paralel cu axa absciselor corespunde procesului izoterm: 0-1 de dilatare ($\delta Q > 0$, $dS > 0$); 0-1¹ – de comprimare ($\delta Q < 0$, $dS < 0$).

2. Dreapta 2^1-2 , ce trece prin punctul 0 paralel cu axa ordonatelor corespunde procesului adiabatic (izentrop): 0-2¹ de dilatare ($dT < 0$); 0-2 – de comprimare ($\Delta S = 0$, $dT > 0$).

Din relația (30.14) urmează, că într-un proces izocor

$$dS = \nu C_{MV} \frac{dT}{T}, \quad \Delta S = \nu C_{MV} \ln \frac{T}{T_0}.$$

Curba 3^1-3 de pe fig.4.21 corespunde procesului izocor: 0-3 de încălzire ($dT > 0$, $dS > 0$); 0-3¹ de răcire ($dT < 0$, $dS < 0$).

Din ultima expresie a relației (30.15) urmează, că într-un proces izobar

$$dS = \nu C_{MP} \frac{dT}{T}, \quad \Delta S = \nu C_{MP} \ln \frac{T}{T_0}.$$

Deoarece $C_{MP} > C_{MV}$ înclinarea curbei 4^1-4 (față de axa S de pe fig.4.21a), care corespunde procesului izobar, este mai mică decât a izocorei 3^1-3 . Dilatării izobare a gazului ideal îi corespunde porțiunea 0 – 4 ($dS < 0$, $dS > 0$, $dT > 0$), iar comprimării izobare – porțiunea 0 – 4¹ ($dT < 0$).

Un proces ciclic reversibil se reprezintă pe diagrama $T-S$, ca și pe alte diagrame, printr-o curbă închisă (fig.4.22). Aria delimitată de această curbă este egală numeric cu căldura,

transformată de sistem în lucru mecanic, dacă ciclul se desfășoară în sensul indicat pe fig. 4.22.

$$A = Q_{prim} + Q_{ced} = \int_{abc} TdS + \int_{cda} TdS,$$

unde

$$Q_{ced} = \int_{cda} TdS < 0.$$

Pentru lucrul efectuat în ciclul direct, obținem

$$A = \oint TdS > 0,$$

iar pentru randamentul acestui ciclu avem

$$\eta = \frac{A}{Q_{prim}} = \frac{\oint TdS}{\int_{abc} TdS}. \quad (30.16)$$

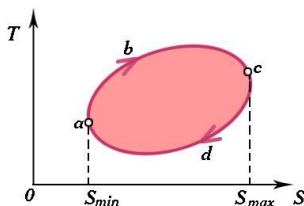


Fig.4.22

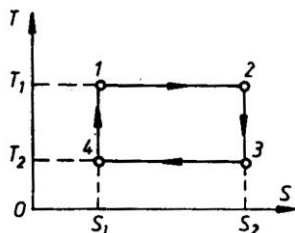


Fig.4.23

Ciclul Carnot are pe diagrama $T-S$ o reprezentare geometrică simplă (fig.4.23)—un dreptunghi cu laturile $(T_1 - T_2)$ și $(S_2 - S_1)$. Folosind această reprezentare se deduce destul de simplu formula de calcul a randamentului ciclului Carnot. Căldura transformată în lucru mecanic în ciclul Carnot direct are valoarea

$$A = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1),$$

iar căldura primită este

$$Q_{prim} = T_1(S_2 - S_1).$$

Ultimele două egalități se substituie în definiția randamentului mașinii termice. Astfel, pentru calculul randamentului mașinii termice, care funcționează după un ciclu Carnot, se obține

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

30.4. Interpretarea statistică a entropiei

Sensul fizic al entropiei nu este evident, așa cum este sensul fizic al altei funcții de stare, anume energia internă. Proprietatea caracteristică a entropiei este că ea variază monoton în procesele naturale, dar această proprietate nu poate fi intuită pe baza reprezentărilor și noțiunilor mecanice. Rezolvarea acestei probleme, adică elucidarea sensului fizic al entropiei, a fost dată în 1877 de Boltzmann, care a introdus în termodinamică reprezentările statistice, asociind fiecărei stări a sistemului o probabilitate de distribuție. Cele expuse în continuare, privitor la interpretarea statistică a entropiei, realizează unul din scopurile de bază ale fizicii statistice – stabilirea și explicarea legilor termodinamice pentru sisteme macroscopice.

După cum s-a arătat anterior, un sistem de particule se află în starea de echilibru statistic (termic), dacă distribuția ce îi corespunde este cea mai probabilă. Aceasta înseamnă, că starea de echilibru corespunde valorii maxime a probabilității de distribuție a particulelor. Dacă un sistem este izolat și se află în starea de echilibru, atunci probabilitatea de distribuție se menține constantă, la valoarea maximă, sistemul rămânând în starea de echilibru. Singurele procese, care pot avea loc într-un astfel de sistem sunt procesele reversibile. Dacă sistemul izolat nu se află inițial într-o stare de echilibru, atunci el evoluează către starea finală de echilibru, adică dintr-o stare cu o probabilitate de distribuție mai mică spre starea cu probabilitatea de distribuție maximă. Un astfel de proces este ireversibil, în decursul lui sistemul trece prin stări intermediare de neechilibru. Astfel, reieșind din considerente statistice, conchidem că procesele termodinamice spontane au un sens bine determinat de desfășurare, întotdeauna către starea de

maximă probabilitate. Totodată, observăm că entropia și probabilitatea de distribuție se comportă la fel—concomitent ambele cresc sau se mențin constante: dacă într-un sistem izolat are loc un proces reversibil probabilitatea de distribuție și entropia rămân constante, $\Delta S = 0$; dacă în același sistem are loc un proces ireversibil, odată cu probabilitatea de distribuție crește și entropia, $\Delta S > 0$.

Relația dintre probabilitatea de distribuție și entropie a fost determinată de către Boltzmann,

$$S = k \ln P, \quad (30.17)$$

unde P este probabilitatea de distribuție, iar k este constanta Boltzmann. Amintim, că probabilitatea de distribuție este egală cu numărul de distribuții distincte ale particulelor sistemului după coordonate și viteze, care corespund stării macroscopice date a sistemului, $P \geq 1$. Desigur, sensul de evoluție al proceselor termodinamice s-ar putea caracteriza și cu ajutorul probabilității P , dar entropia prezintă avantajul că este o mărime aditivă. Ne vom convinge de aceasta, considerând un sistem compus din două subsisteme, ce nu interacționează între ele. Se notează cu P_1 și P_2 probabilitățile de distribuție corespunzătoare subsistemelor. Conform teoremei probabilităților compuse, probabilitatea de distribuție a sistemului în ansamblu are valoarea

$$P = P_1 P_2.$$

Prin logaritmarea acestei egalități și înmulțirea cu constanta Boltzmann se obține

$$k \ln P = k \ln P_1 + k \ln P_2, \quad S = S_1 + S_2.$$

Relația (30.17) sugerează ideea că pe baza fizicii statistice ar putea fi calculată entropia unui sistem aflat în stare de echilibru. Într-adevăr, calculul probabilității de distribuție pentru gazul ideal ne conduce la următoarea expresie pentru entropie

$$S = S_0 + kN \ln \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_0}, \quad (30.18)$$

unde S_0 este o constantă arbitrară, n_0 este concentrația moleculelor, iar N – numărul total de molecule ale gazului ideal. Observăm, că entropia sistemului în starea dată este determinată cu precizia de până la o constantă aditivă S_0 .

Ca exemplu de aplicare a expresiei (30.18) vom analiza procesul de dilatare izotermă a unui gaz ideal în limitele de la V la $2V$ adică de la concentrația n_0 la $\frac{n_0}{2}$ (fig.4.24).

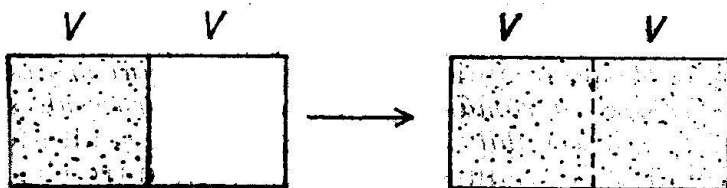


Fig. 4.24

Entropiile S_1 și S_2 pentru stările inițială, respectiv finală, sunt

$$S_1 = S_0 + kN \ln \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_0}, \quad S_2 = S_0 + kN \ln \frac{2T^{\frac{3}{2}}}{n_0},$$

iar pentru variația entropiei obținem,

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = kN \ln 2 > 0. \quad (30.19)$$

Procesul considerat are loc în conformitate cu principiul al doilea al termodinamicii, odată cu entropia crește probabilitatea de distribuție. Procesului invers, de la $2V$ la V , îi corespunde variația entropiei

$$\Delta S_{21} = -kN \ln 2 < 0,$$

ceea ce înseamnă că este un proces extrem de improbabil. Este foarte puțin probabil că moleculele gazului să revină, de la sine, în prima jumătate a vasului, așa cum se aflau inițial.

Dacă relația (30.17) se substituie în (30.19) obținem,

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = N \ln 2, \quad \frac{P_2}{P_1} = 2^N.$$

Deoarece gazul ideal considerat reprezintă un sistem macroscopic, din ultima egalitate urmează $P_2 \gg P_1$. Procesul invers ar însemna o trecere a sistemului dintr-o stare cu probabilitate mare în una cu probabilitate mult mai mică, deci acest proces nu se produce spontan în natură. Este importantă precizarea, că concluziile acestea sunt valabile numai pentru sisteme macroscopice. Dacă această condiție nu se respectă și, de exemplu, $N = 2$, atunci $\frac{p_1}{p_2} = 0,25$, p_1 și p_2 au valori comparabile și procesul $2V \rightarrow V$ este posibil. Dar în cazul unui număr mic de particule în sistemul considerat noțiunile și legile fizicii statistice nu mai sunt aplicabile și nici nu sunt necesare.

30.5. Dependența dintre entropie și cantitatea de informație.

În baza teoriei informației, dezvoltate rapid în jumătatea a doua a sec. XX, se află metoda de calcul a cantității de informație, propusă de către K. Shanon. Această metodă se bazează pe dependența dintre entropie și cantitatea de informație.

Boltzmann a introdus în termodinamică reprezentările statistice, asociind fiecărei stări a sistemului o probabilitate de distribuție. Aceasta este cu atât mai mare cu cât este mai nedeterminată, mai dezordonată starea sistemului din punctul de vedere al distribuției parametrilor microscopici, ce descriu mișcărilor mecanice ale particulelor sistemului. Entropia crește odată cu probabilitatea de distribuție (a se vedea formula 30.17), astfel că ea atinge valoarea maximă în starea de distribuție maximă (starea de echilibru termodinamic). Utilizând formula de calcul a probabilității de distribuție (23.4) sau (23.5), numită și funcția probabilității, se poate analiza întreg procesul de trecere a unui sistem din starea de echilibru, cu entropie maximă, în starea în care este posibilă o unică, strict determinată microstare a sistemului. Această concluzie se dovedește a fi valabilă pentru orice sisteme izolate, fie gaze, solide, lichide, sisteme biologice, etc.

Analizând cantitatea de informație, conținută în structura unui sistem, se constată că ea este proporțională cu gradul de abatere a sistemului de la starea de echilibru și este determinată de ordinea, menținută în structura lui. De exemplu, cantitatea de informație dintr-un text este cu atât mai mare cu cât este mai mare gradul de abatere a textului de la starea de echilibru, în care fiecare literă are aceeași probabilitate de distribuție și textul reprezintă o totalitate haotică de litere, lipsită de sens.

În concluzie: *cantitatea de informație* este proporțională cu diferența dintre entropia maximă a sistemului în echilibru și entropia sistemului în starea considerată; pentru calculul cantității de informație trebuie utilizată aceeași funcție, ca și pentru calculul entropiei.

Amintim că relația (30.17) descrie mecanismul microproceselor, ce conduc la variația entropiei unui sistem termodinamic de natură fizică. Probabilitatea de distribuție $P \geq 1$ din această relație este definită prin formulele (23.4) și (23.5) pentru un sistem nedegenerat, respectiv degenerat. În cele ce urmează se aplică formula (23.4), adică:

$$P = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!} \quad (30.20)$$

M. Planck a introdus *entropia matematică* H

$$H = \ln P, \quad (30.21)$$

care, evident, diferă de entropia S doar prin factorul constant k (constanta Boltzmann).

$$S = k \ln P = kH.$$

În continuare, M. Planck a modificat formulele (30.20), (30.21):

1. transformând relația (30.20) în baza formulei lui Stirling,

$$\ln x! \approx x \ln x - x,$$

valabilă în cazul numerelor naturale x mari;

2. folosind legea de conservare a numărului de particule;

3. introducând probabilitatea matematică a unei anumite stări a particulelor $p_i = \frac{N_i}{N}$, care respectă condiția

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

În rezultat, a fost obținută următoarea relație:

$$H = \ln P \approx -N \sum_{i=1}^m p_i \cdot \ln p_i. \quad (30.22)$$

Deși transformările efectuate de Planck sunt formale din punct de vedere matematic, formula (30.22) permite o interpretare fizică mai profundă a mărimilor H și P . Totodată, introducerea probabilităților p_i a extins cadrul de aplicare a relației (30.22) pentru sisteme de orice natură. Astfel, p_i poate însemna probabilitatea realizării unei stări atât a moleculelor unui sistem fizic, cât și a elementelor oricărui sistem. Mărima H din relația (30.22) este *entropia matematică totală* a sistemului considerat. În baza aceste relații a fost obținută formula de calcul a valorii medii a entropiei matematice \overline{H} , ce revine unui element al sistemului

$$\overline{H} = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \ln p_i. \quad (30.23)$$

Anume această formulă a fost pusă de către K. Shanon la baza metodei sale de calcul a cantității de informație. Inițial Shanon a elaborat metoda sa doar pentru calculul informației în telecomunicații. De aceea, pentru comoditatea calculului entropiei unei comunicări, transmise prin cod binar, Shanon a înlocuit logaritmul natural prin logaritmul în baza doi.

$$\overline{H} = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2 p_i. \quad (30.24)$$

Să aplicăm formula (30.24) pentru calculul entropiei matematice medii a unei litere dintr-un text:

$$\overline{H} = -\sum_{i=a}^z p_i \cdot \log_2 p_i =$$

$$= -(p_a \log_2 p_a + p_b \log_2 p_b + p_c \log_2 p_c + \dots + p_z \log_2 p_z).$$

Dacă presupunem că toate literele din alfabet au aceeași probabilitate de a apărea în text (text haotic, lipsit de structură, de informație), atunci

$$p_a = p_b = p_c = \dots = p_z,$$

$$\overline{H} = \overline{H}_{\max} = -\frac{1}{N} \sum_{i=a}^z \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

În fine, putem defini *unitatea cantității de informație, numită bit* (denumirea provine din abrevierea expresiei în engleză „*binary unit*”): 1 bit reprezintă cantitatea de informație conținută în comunicarea despre realizarea unuia din două evenimente cu aceeași probabilitate de realizare

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$$

Substituind această egalitate în relația (30.24) obținem:

$$\overline{H} = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ bit},$$

În textele reale probabilitățile apariției literelor sunt diferite. Substituind în formula (30.24) probabilitățile reale ale literelor se obține o valoare a entropiei \overline{H}_r , mai mică decât cea maximă (30.25). Diferența dintre \overline{H}_{\max} și \overline{H}_r reprezintă cantitatea de informație previzibilă I_r din text

$$I_r = \overline{H}_{\max} - \overline{H}_r$$

Deși, inițial, metoda lui Shannon a fost elaborată doar pentru a rezolva probleme tehnice concrete în telecomunicații, ea s-a dovedit a fi universală. În prezent aceasta metodă este utilizată pentru diverse sisteme, inclusiv pentru sisteme atât de complicate, cum ar fi sistemele biologice și cele sociale.

Deoarece cantitatea de informație dintr-un sistem este legată de entropia lui, devin foarte importante mecanismele proceselor, ce duc la micșorarea entropiei sistemului, numite mecanisme antientropice. Aceste mecanisme sunt studiate în cadrul termodinamicii proceselor de neechilibru. Este important de menționat că procesele antientropice nu contravin principiului doi al termodinamicii, deoarece concomitent cu micșorarea locală a entropiei unui sistem are loc creșterea entropiei corpurilor, exterioare sistemului considerat.

§ 31. Principiul al treilea al termodinamicii

Din relația $dS = \frac{\delta Q}{T}$, considerată definiție a entropiei și din formularea principiului al doilea al termodinamicii (30.11) rezultă că entropia este definită numai până la o constantă arbitrară. Totodată, principiul al doilea nu conține nici o precizare privitor la comportamentul sistemelor fizice în vecinătatea temperaturii de zero absolut sau la posibilitatea atingerii acestei temperaturi. Valoarea constantei arbitrare din definiția entropiei este determinată de principiul al treilea al termodinamicii, care se referă tocmai la comportamentul sistemelor termodinamice la zero absolut.

În urma generalizării și sistematizării datelor experimentale privind valorile entropiei la diferite temperaturi, fizicianul și chimistul german W.Nernst a ajuns în 1906 la următoarea concluzie: atunci când temperatura absolută a unui sistem termodinamic tinde către zero absolut, entropia acestuia tinde către o valoare constantă, independentă de parametrii extensivi (de exemplu de volum), de starea de agregare sau alte caracteristici ale sistemului termodinamic. Această concluzie reprezintă una din formulările *principiului al treilea al termodinamicii*, cunoscut și sub denumirea de *teorema lui Nernst*. În fig.4.25 sunt prezentate curbele de variație a entropiei S în funcție de temperatura absolută T , luându-se ca parametru volumul V al sistemului termodinamic. Se observă că indiferent de valoarea volumului

sistemului considerat, entropia tinde la valoarea ei unică S_0 , când $T \rightarrow 0K$.

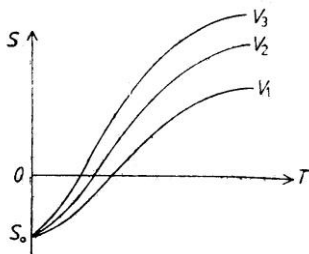


Fig. 4.25

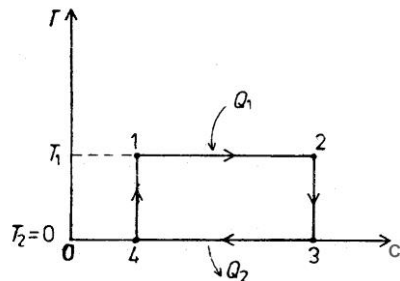


Fig. 4.26

M. Planck extinde concluziile lui W. Nernst, postulând că în cazul unui sistem omogen condensat (lichid sau solid) însăși entropia tinde către zero, când temperatura tinde către zero absolut,

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Caracterul general al acestei afirmații constă, în primul rând, în aceea că se referă la orice sistem și, în al doilea rând, că entropia tinde către zero absolut pentru $T \rightarrow 0$, independent de valorile pe care le iau ceilalți parametri de care depinde entropia. Considerarea numai a sistemelor omogene trebuie înțeleasă numai în sensul că la temperatura de zero absolut nu se pot găsi în echilibru decât sistemele omogene. Considerarea sistemelor condensate de asemenea nu limitează caracterul general al afirmației lui Planck deoarece la $T \rightarrow 0K$ nici o substanță nu există în stare gazoasă, toate substanțele cunoscute se condensează la temperaturi joase, fiind solide, cu excepția *He* – II care este solid sau lichid în funcție de presiune. (La temperaturi joase *He* suportă o tranziție de fază, în rezultatul căreia devine suprafluid și este denumit *He* – II). Formularea lui Planck reprezintă unul din enunțurile principiului al treilea al termodinamicii. Se poate da și o altă formulare pentru principiul al treilea al termodinamicii: nici un sistem nu poate fi răcit până la

temperatura de zero absolut, deoarece temperatura $0K$ este principial inaccesibilă. Însă, principial, este posibil a ne apropia oricât de mult de $0K$.

Pentru a arăta că din formularea lui Planck rezultă imposibilitatea atingerii temperaturii de zero absolut se va admite contrariul. Considerăm o mașină termică ce funcționează după ciclul Carnot, sursa rece având temperatura $T_2 = 0K$ (fig.4.26). Variația entropiei în întreg ciclul este nulă, deci se poate scrie:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$$

În procesele adiabactice 2-3 și 4-1 entropia este constantă, $\Delta S_{23} = 0, \Delta S_{41} = 0$. Pe izoterma 3-4 entropia este mereu egală cu zero conform formulării lui Planck. Totodată, pentru un proces izoterm, conform (30.13) se poate scrie $\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1}$. Atunci suma variațiilor entropiei în ciclul considerat devine

$$\Delta S_{12} = 0, \quad \frac{T_1}{Q_1} = 0.$$

Acest rezultat este absurd, deoarece conform considerentelor $Q_1 \neq 0, T_1 \neq 0K$. Prin urmare, presupunerea că temperatura $T = 0K$ poate fi atinsă este absurdă.

1. O primă consecință a principiului al treilea este faptul că la $T = 0K$ coeficienții calorici ai sistemelor termodinamice se anulează

$$\lim_{T \rightarrow 0K} C = \lim_{T \rightarrow 0K} \frac{\delta Q}{dT} = \lim_{T \rightarrow 0K} \left(T \frac{\delta S}{\delta T} \right) = \lim_{T \rightarrow 0K} \left(T \frac{\delta S}{\delta(\ln T)} \right) = 0.$$

În particular,

$$\lim_{T \rightarrow 0K} C_V = \lim_{T \rightarrow 0K} \left(T \frac{\delta S}{\delta(\ln T)} \right)_V = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow 0K} C_P = \lim_{T \rightarrow 0K} \left(T \frac{\delta S}{\delta(\ln T)} \right)_P = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0K} (C_P - C_V) = 0.$$

Din aceste rezultate urmează că pentru temperaturi $T \rightarrow 0\text{ K}$ nu este valabilă nici ecuația de stare a gazului ideal. Semnificația fizică a anulării coeficienților calorigici este următoarea: temperatura de 0 K reprezintă acea stare, în care sistemul nu mai poate ceda căldură, deoarece este atinsă starea de energie minimă. Energia internă a sistemului este distribuită între particulele sale într-un mod determinat, unic. Datorită ordinii totale a acestei stări unice, probabilitatea sa termodinamică este $P=1$,

$$S_{T \rightarrow 0\text{ K}} = k \ln 1 = 0.$$

2. Se poate demonstra că pentru $T \rightarrow 0\text{ K}$ coeficienții de dilatare termică și coeficientul termic al presiunii tind către zero. Adică, pentru $T \rightarrow 0\text{ K}$ solidele nu mai sunt compresibile. Conform acestui rezultat, din definiția coeficientului termic al

presiunii $\beta = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\delta p}{\delta T} \right)_v$ se deduce că pentru temperaturi $T \rightarrow 0\text{ K}$

presiunea unui gaz nu depinde de temperatură, fiind o funcție numai de densitate. Se spune că gazul se află în stare de degenerare, iar gazul este numit gaz degenerat. Un exemplu de astfel de gaz degenerat este gazul electronilor liberi din metale la temperaturi obișnuite. Comportarea unui gaz degenerat nu mai este descrisă de statistica Boltzmann-Maxwell.

3. Pentru $T \rightarrow 0\text{ K}$ entropia sistemului nu poate fi modificată prin nici un fel de acțiune. Din această consecință rezultă o altă formulare a principiului al treilea al termodinamicii : izoterma la 0 K coincide cu adiabata.

Principiul al treilea al termodinamicii are un spectru de aplicații mai restrânse decât primele două principii. Principalele aplicații sunt în domeniul chimiei și în fizica temperaturilor joase.

§32. Potențiale termodinamice.

Entropia și energia internă sunt funcții de stare de o importanță fundamentală în descrierea proceselor termodinamice: variația entropiei indică sensul proceselor termodinamice în

sisteme izolate sau izolate adiabatic, iar variația energiei interne asigură desfășurarea lor în conformitate cu legile conservării și transformării energiei. Totodată, unele procese naturale nu se realizează în condițiile sistemului izolat sau izolat adiabatic, dar în condiții în care unii dintre parametri se mențin constanți (de exemplu T și V , sau T și p , etc.). În asemenea cazuri se folosesc și alte funcții de stare, numite potențiale termodinamice, ce se introduc analog cu energia potențială în mecanică (a se vedea formula 8.6). În cazul când energia potențială a unui sistem mecanic este minimă, sistemul se află în starea de echilibru mecanic stabil. Analog, dacă potențialul termodinamic este minim, sistemul se află în stare de echilibru termodinamic.

În cele ce urmează vom analiza doar cele mai importante potențiale termodinamice, folosite pentru obținerea sistemului de ecuații termodinamice ale lui Maxwell. Aceste ecuații au numeroase aplicații în termodinamică, în particular ele permit obținerea ecuațiilor de stare în formă diferențială.

Considerăm un sistem termodinamic închis care efectuează (sau asupra căruia se efectuează) numai lucru de natură mecanică. Dacă în inegalitatea (30.10) se substituie expresia (27.8) a principiului întâi al termodinamicii, obținem:

$$TdS \geq dU + \delta A = dU + pdV. \quad (32.1)$$

Inegalitatea (32.1) se realizează în cadrul oricărui proces natural. Semnele „=” și „>” corespund procesului reversibil, respectiv ireversibil. Scrisă numai pentru procese reversibile, relația (32.1) este cunoscută sub denumirea de *ecuație fundamentală a termodinamicii*,

$$TdS = dU + pdV. \quad (32.2)$$

a) Energia liberă.

Să scriem inegalitatea (32.1) pentru un sistem de volum $V = \text{const}$, aflat în contact cu un termostat de temperatură T .

$$TdS \geq dU, \quad d(U - TS) \leq 0. \quad (32.3)$$

Ultima inegalitate (32.3) sugerează necesitatea definirii unei noi funcții de stare $F(V, T)$

$$F(V, T) = U - TS, \quad (32.4)$$

numită *energie liberă* sau *potențialul lui Helmholtz*. Atunci relația (32.3) devine

$$dF \leq 0, \quad (32.5)$$

și se explică astfel: procesele naturale, în care volumul și temperatura sistemului considerat sunt invariabile se desfășoară astfel, încât energia liberă rămâne constantă în procese reversibile și scade în procesele ireversibile. Prin urmare, sistemul termodinamic, aflat în condițiile indicate, tinde către starea de echilibru stabil, în care energia liberă are valoarea minimă. Să considerăm un proces izoterm reversibil pentru care scriem (32.2), adică $\delta A = TdS - dU$,

$$\left. \begin{aligned} \delta A &= -d(U - TS) \\ A_{12} &= -\Delta F \\ A_{12} &= -F_1 - F_2 \end{aligned} \right\}. \quad (32.6)$$

Din egalitățile (32.6) urmează că energia liberă reprezintă acea parte a energiei interne a sistemului, care se transformă în lucru mecanic într-un proces izoterm reversibil. Mărimea fizică TS , egală cu diferența dintre energia internă și energia liberă a fost numită *energie legată*. Lucrul efectuat de sistem într-un proces adiabat este egal cu variația energiei sale interne, luate cu semnul minus,

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

Comparând această egalitate cu ultima din (32.6) ajungem la concluzia că energia liberă are în procesele izoterme același rol pe care îl are energia internă în procesele adiabate.

b) *Entalpia. Entalpia liberă.*

Considerăm un sistem termodinamic în care se realizează un proces izobar. Scriem principiul întâi al termodinamicii în formă diferențială

$$\begin{aligned} (dU)_p &= (dQ)_p - pdV, \\ (dU + pV)_p &= (\delta Q)_p. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Definim o nouă funcție de stare, numită *entalpie* H

$$H = U + pV . \quad (32.8)$$

Relația (32.7) devine:

$$(dH)_p = (\delta Q)_p \quad (32.9)$$

Comparând relațiile (32.9) și (28.3) se observă, că entalpia are în cadrul proceselor izobare același rol, pe care îl are energia internă în cadrul proceselor izocore. Pentru un sistem cu presiunea și temperatura constantă, inegalitatea (32.1) se scrie

$$d(U + pV - TS) \leq 0. \quad (32.10)$$

Această inegalitate sugerează necesitatea definirii unei noi funcții de stare, numită *entalpie liberă, sau potențialul lui Gibbs*

$$G = U + pV - TS. \quad (32.11)$$

Inegalitatea (32.10) devine

$$dG \leq 0. \quad (32.12)$$

Am obținut că într-un proces ireversibil entalpia liberă a sistemului considerat scade. În final, sistemul ajunge în stare de echilibru, cu valoarea minimă a entalpiei libere. Substituind egalitățile (32.7) și (32.3) în (32.10) obținem relațiile dintre G și H , respectiv G și F

$$G = H - TS, \quad G = F + pV . \quad (32.13)$$

Aplicații. Probleme rezolvate

Problema 1

Densitatea unui gaz ideal în condiții normale este egală cu 1.25 kg/m^3 . Raportul căldurilor molare la presiune constantă C_{MP} și volum constant C_{MV} este egal cu 1,4.

Să se calculeze căldurile specifice la presiune constantă c_p și la volum constant c_v .

Rezolvare

Exprimăm constanta universală a gazelor R din ecuația de stare a gazului ideal

$$R = \frac{pV}{\frac{m}{M}T} = \frac{pM}{\rho T},$$

unde densitatea $\rho = \frac{m}{V}$. Expresia pentru R se substituie în relația

lui Mayer, scrisă pentru călduri specifice, $c_p - c_v = \frac{R}{M} = \frac{p}{\rho T}$.

Știind că indicele adiabatic $\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$, din ultimele două relații rezultă căldurile specifice c_p, c_v .

$$c_v = \frac{p}{\rho T(\gamma - 1)} = 740 \frac{\text{J}}{\text{kgK}},$$

$$c_p = \gamma c_v = 1.04 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

Problema 2

Să se calculeze căldura molară C_M a unui gaz ideal într-un proces în care temperatura gazului: a) este proporțională cu pătratul volumului gazului; b) este invers proporțională cu volumul său. Se cunoaște căldura molară la volum constant C_{MV} .

Rezolvare

a) În conformitate cu condiția problemei $T = aV^2$, unde $a = \text{const}$. Cantitatea de căldură schimbată de gaz cu mediul exterior este $Q = C_M \nu \Delta T$, variația energiei interne nu depinde de proces și se scrie $\Delta U = C_{MV} \nu \Delta T$, iar lucrul efectuat de gaz se calculează

din relația $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$. Relația dintre aceste trei mărimi fizice

reprezintă principiul întâi al termodinamicii, $Q = \Delta U + A_{12}$,

$C_M \nu \Delta T = C_{MV} \nu \Delta T + \int_{V_1}^{V_2} p dV$. Anume din ultima egalitate vom calcula C_M , determinând mai întâi lucrul mecanic A_{12} . Exprimăm presiunea p din ecuația de stare și substituim $V = \sqrt{\frac{T}{a}}$; $p = \frac{\nu R T}{V} = \nu R \sqrt{a T}$. Totodată, $dV = \frac{dT}{2\sqrt{aT}}$. Folosind ultimele două relații, rezultă următoarea expresie pentru lucrul mecanic efectuat de gaz:

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \nu R \sqrt{a T} \frac{dT}{2\sqrt{a T}} = \frac{\nu R}{2} \Delta T,$$

Se substituie acest rezultat în principiul întâi al termodinamicii. Urmează,

$$\nu C_M \Delta T = \nu C_{MV} \Delta T + \frac{\nu R}{2} \Delta T, \quad C_M = C_{MV} + \frac{R}{2}.$$

b) Dependența temperaturii de volum este dată de relația $T = \frac{b}{V}$ de unde $V = \frac{b}{T}$ și $dV = -\frac{b}{T^2} dT$. Expresia pentru presiune, obținută din ecuația de stare, devine

$$p = \frac{\nu R T}{V} = \frac{\nu R T^2}{b},$$

iar pentru lucrul mecanic efectuat de gaz obținem

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu R T^2}{b} \left(-\frac{b}{T^2} \right) dT = -\nu R \Delta T.$$

Scriem principiul întâi al termodinamicii folosind această expresie pentru lucrul mecanic și aceleași expresii, ca și în punctul a), pentru Q și ΔU .

$$\nu C_M \Delta T = \nu C_{MV} \Delta T - \nu R \Delta T.$$

Urmează : $C_M = C_{MV} - R$.

Problema 3

Să se calculeze raportul dintre lucrurile mecanice efectuate într-o transformare adiabată și una izotermă, la comprimarea unui volum de gaz biatomic de la volumul $V_1=5$ l la volumul $V_2=1$ l. Care comprimare este mai avantajoasă?

Rezolvare

Lucrul mecanic în transformarea izotermă se calculează din relația :

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Lucrul mecanic în transformarea adiabată se obține, substituind expresia pentru p , obținută din ecuația Poisson, $p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$, în formula pentru lucrul mecanic,

$$\begin{aligned} A_Q &= p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{\nu RT}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \end{aligned}$$

Pentru raportul căutat obținem,

$$\frac{A_Q}{A_T} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = 1,4$$

calculând, în prealabil, $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$.

Astfel, $A_T < A_Q$, deci este mai avantajoasă comprimarea izotermă.

Problema 4

Un kmol de gaz ideal biatomic trece din starea, definită de temperatura $T_1=300\text{K}$ și presiunea $p_1=10\text{atm}$, în starea cu presiunea $p_2=1\text{ atm}$ printr-un proces politrop $pV^n = \text{const}$, unde $n=1,2$. Să se calculeze: a) lucrul mecanic efectuat asupra gazului; b) căldura schimbată de gaz cu mediul exterior; c) căldura molară a gazului în procesul politrop.

Rezolvare

Valoarea indicelui adiabatic pentru gazul biatomic este $\gamma=1,4$ ($i=5$). Prin urmare, graficul procesului politrop cu indicele 1,2 ($1 < 1,2 < \gamma$) este o curbă, situată între izotermă și adiabată.

a) în ecuația politropei $pV^n = p_1V_1^n$ exprimăm presiunea unei stări

arbitrare $p = \frac{p_1V_1^n}{V^n}$, pe care o substituim în formula de calcul a lucrului mecanic:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1V_1^n}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right],$$

unde :

$$V_1 = \frac{\nu RT}{p_1} = 2,5 \text{ m}^3, V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} = 17 \text{ m}^3$$

Rezultatul calculului numeric este $A_{12}=4 \text{ MJ}$.

b) Vom calcula căldura schimbată cu mediul exterior din principiul întâi al termodinamicii, $Q = \Delta U + A_{12}$, unde $\Delta U = \nu C_{MV}(T_2-T_1)$ urmează a fi determinată. Pentru aceasta exprimăm C_{MV} din definiția indicelui adiabatic, în care $C_{MP}=C_{MV}+R$,

$$\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{C_{MV} + R}{C_{MV}}, \quad C_{MV} = \frac{R}{\gamma - 1},$$

iar din ecuația de stare se află $T_2 = \frac{p_2V_2}{\nu R}$. În rezultat, pentru ΔU

obținem expresia:

$$\Delta U = \nu \frac{R}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2 V_2}{\nu R} - 1 \right),$$

pe care o substituim în principiul întâi al termodinamicii și calculăm Q .

$$Q = A_{12} + \nu \frac{R}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2 V_2}{\nu R} - 1 \right) \approx 2 \text{ MJ}$$

Faptul că $Q < A_{12}$ este o urmare a micșorării temperaturii $\frac{p_2 V_2}{\nu R} = T_2 < T_1$, deci și a energiei interne, $\Delta U < 0$.

c) Căldura molară se definește $C_n = \frac{Q}{\nu \Delta T}$, unde $\Delta T = \frac{p_2 V_2}{\nu R} - T_1$.

Obținem,

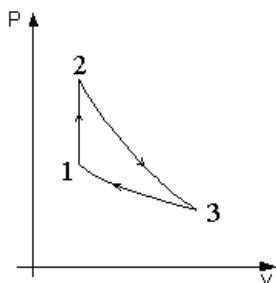
$$C_n = \frac{Q}{\nu \left(\frac{p_2 V_2}{\nu R} - T_1 \right)} = \frac{QR}{p_2 V_2 - \nu R T_1} = -\frac{5}{2} R = -C_{MV}.$$

Constatăm că pentru procesul politrop cu $1 < n < \gamma$ căldura molară este negativă, gazul efectuează un lucru mai mare decât căldura primită. Prin urmare, gazul consumă pentru efectuarea lucrului și o parte a energiei sale interne, răcindu-se, deși primește căldură din exterior.

Problema 5

Ciclul, efectuat de un gaz ideal monoatomic, este format dintr-o izocoră, o adiabată și o izotermă. În timpul efectuării ciclului temperatura variază de a ori, iar procesul izoterm se realizează la valoarea minimă a temperaturii. Să se determine randamentul ciclului.

Rezolvare



Am trasat graficul ciclului, luând în considerație faptul că adiabata este mai înclinată ca izoterma. Totodată, izoterma 3-1 corespunde temperaturii minime $T_1 = T_3 < T_2$. analizând procesele din

care este compus ciclul, constatăm: în procesul izocor 1-2 gazul primește căldura $Q_{12} > 0$; în procesul adiabat 2-3 schimb de căldură nu are loc, $Q_{23} = 0$; în procesul izoterm 3-1 gazul cedează căldura $Q_{31} < 0$. În baza principiului întâi al termodinamicii, determinăm valorile Q_{12} și $|Q_{31}|$.

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \nu C_{MV} (T_2 - T_1) = \nu \frac{i}{2} RT_1 (a - 1), \left(\frac{T_2}{T_1} = a \right)$$

$$|Q_{31}| = |A_{31}| = \left| \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3} \right| = \nu RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

Pentru randamentul ciclului obținem

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{\nu RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}}{\nu \frac{i}{2} RT_1 (a - 1)} = 1 - \frac{\ln \frac{V_3}{V_1}}{\frac{i}{2} (a - 1)}.$$

Ecuția procesului adiabetic 2-3 se scrie $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1}$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1}. \text{ Totodată, } \frac{T_2}{T_1} = a. \text{ Prin urmare, } \frac{V_3}{V_2} = a^{\frac{1}{\gamma-1}}. \text{ Se}$$

substituie acest rezultat în relația pentru η . Obținem,

$$\eta = 1 - \frac{\ln a}{(\gamma - 1)(a - 1) \frac{i}{2}}.$$

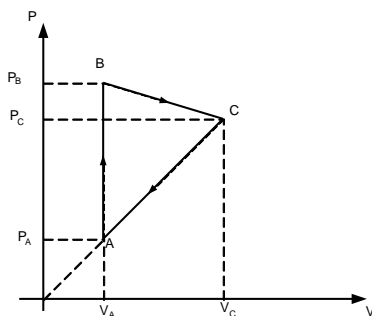
Deoarece gazul este monoatomic $i = 3$, $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$,

$$\eta = 1 - \frac{\ln a}{a - 1}.$$

Problema 6

Un gaz ideal monoatomic efectuează ciclul din figură. Să se calculeze randamentul ciclului și să se compare cu randamentul unui ciclu Carnot, ce ar funcționa între izotermele ce trec prin

punctele B și A. Căldura molară pe transformarea BC este $C_M=R$.
Se cunosc: $p_B=a p_A$, $V_C=bV_A$; caz particular $a=3$; $b=2$.



Randamentul ciclului este raportul dintre lucrul efectuat și căldura primită pe întregul ciclu, $\eta = \frac{A}{Q_I}$. Lucrul A este egal cu

aria ciclului direct, adică

$$A = \frac{(V_C - V_A)(p_B - p_A)}{2} = \frac{(a-1)(b-1)p_A V_A}{2}.$$

Gazul primește căldură în procesul izocor AB și în procesul de dilatare BC.

$$Q_I = Q_{AB} + Q_{BC} = \Delta U_{AB} + Q_{BC}.$$

În conformitate cu condiția problemei

$$Q_{BC} = \nu C_M (T_C - T_B) = \nu R (T_C - T_B),$$

iar

$$\Delta U_{AB} = \nu C_{MV} (T_B - T_A) = \frac{i}{2} R \nu (T_B - T_A).$$

Determinăm temperaturile T_A, T_B, T_C din ecuația de stare.

$$T_A = \frac{p_A V_A}{\nu R}, T_B = \frac{p_B V_B}{\nu R}, T_C = \frac{p_C V_C}{\nu R}.$$

Pentru căldura primită obținem :

$$Q_I = \frac{i}{2} R \nu \left(\frac{p_B V_B}{\nu R} - \frac{p_A V_A}{\nu R} \right) + \nu R \left(\frac{p_C V_C}{\nu R} - \frac{p_B V_B}{\nu R} \right).$$

Deoarece graficul procesului CA este un segment de dreaptă, prelungirea căruia trece prin originea sistemului de coordonate, în acest proces presiunea este direct proporțională cu volumul, deci $p_c = b \cdot p_A$. Aceasta relație, cât și $p_B = a \cdot p_A$, $V_C = b \cdot V_A$, se substituie în egalitatea de mai sus. Rezultă următoarele egalități pentru Q și η .

$$Q_1 = \frac{i}{2} P_A V_A (a-1) + p_A V_A (b^2 - a) = p_A V_A \left[\frac{i}{2} (a-1) + (b^2 - a) \right],$$

$$\eta = \frac{(a-1)(b-1)p_A V_A}{2p_A V_A \left[\frac{i}{2} (a-1) + (b^2 - a) \right]} = \frac{(a-1)(b-1)}{2 \left[\frac{i}{2} (a-1) + (b^2 - a) \right]}.$$

În cazul particular considerat $a=3$; $b=2$. Gazul este monoatomic, deci $i=3$. Rezultă

$$\eta = 0,25.$$

Randamentul ciclului Carnot, izotermele căruia ar trece prin punctele B și A este

$$\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{p_A V_A}{p_B V_B} = 1 - \frac{1}{a}.$$

În cazul particular considerat $\eta_C = 0,67$.

Problema 7

Să se determine variația entropiei ΔS unui kmol de gaz ideal biatomic, temperatura căruia variază de la $0^0 C$ la $500^0 C$ într-un proces: a) izocor, b) izobar.

Rezolvare

Scriem principiile unu și doi ale termodinamicii în formă diferențială, pentru procese reversibile,

$$\delta Q = dU + pdV, \quad \delta Q = TdS,$$

din care rezultă relația

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV .$$

Substituim în această relație expresiile pentru variația energiei interne $dU = \nu C_{MV} dT$ și pentru $\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V}$, ultima rezultând din ecuația de stare . Obținem,

$$dS = \nu C_{MV} \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} .$$

Integrăm ultima egalitate în limite arbitrare

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = \nu C_{MV} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} ,$$

$$\Delta S = \nu C_{MV} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Această formulă de calcul a variației entropiei unui gaz ideal a fost dedusă pentru un proces reversibil arbitrar. Vom mai apela la ea în procesul rezolvării problemei 8.

a) în cazul procesului izocor $V_1 = V_2$, $C_{MV} = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R$. Atunci

$$\Delta S = \nu C_{MV} \ln \frac{T_2}{T_1} \approx 22 \frac{kJ}{K} .$$

b) în cazul procesului izobar $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$, $C_{MP} = \frac{7}{2} R$. Atunci

$$\Delta S = \nu (C_{MV} + R) \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_{MP} \ln \frac{T_2}{T_1} \approx 30 \frac{kJ}{K} .$$

Problema 8

Într-un proces politrop temperatura unui kmol de gaz ideal variază de la $T_1 = 300$ K la $T_2 = 400$ K. Indicele politropei este $n=3$, iar gazul este biatomic. Să se calculeze: a) variația entropiei ΔS a gazului; b) lucrul mecanic efectuat asupra gazului.

Rezolvare

a) Variația entropiei gazului ideal se calculează din relația (se vedea formula dedusă în problema 7)

$$\Delta S = \nu C_{MV} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Pentru căldura molară la volum constant C_{MV} avem $C_{MV} = \frac{R}{n-1}$.

Ecuția politropei o scriem sub forma:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Obținem următoarea expresie pentru variația entropiei:

$$\Delta S = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{\nu R(n - \gamma)}{(\gamma - 1)(n - 1)} \ln \frac{T_2}{T_1} = 4781 \text{ J/K}$$

b) lucrul gazului ideal într-un proces politrop, efectuat la variația volumului său de la V_1 la V_2 , este

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right].$$

Folosind ecuațiile

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1}, p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

ajungem la următoarea expresie pentru A_{12} ,

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{n-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{\nu R}{n-1} [T_1 - T_2] = -415,5 \text{ kJ}.$$

Deci, lucrul efectuat asupra gazului, $A'_{12} = 415,5 \text{ kJ}$.

Problema 9

Un kg apă, aflat la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$, este pus în contact termic cu o sursă de căldură (termostat) aflată la $t_0 = 80^\circ\text{C}$. Să se calculeze: a) cu cât a variat entropia sistemului total (apă + sursă de căldură) după stabilirea echilibrului termic; b) cu cât variază

entropia sistemului total dacă apa este pusă mai întâi în contact cu o sursă la $t_2 = 50^\circ\text{C}$ și apoi în contact cu cea de 80°C . Căldura specifică a apei este $c = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; c) în ce condiții poate fi încălzită apa de la t_1 la t_0 fără variație de entropie?

Rezolvare

a) Variația entropiei sistemului este egală cu suma variațiilor entropiei apei și a sursei: $\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_s$

$$\Delta S_a = \int_{T_1}^{T_0} \frac{\delta Q}{T} = mc \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_0}{T_1} = 779 \frac{\text{J}}{\text{K}},$$

$$\Delta S_s = \frac{Q}{T_0} = \frac{mc(T_1 - T_0)}{T_0} = -710 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

deoarece temperatura T_0 a sursei rămâne constantă, iar Q este căldura cedată apei. Atunci,

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_s = 68,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} > 0.$$

Rezultatul obținut este în conformitate cu principiul doi al termodinamicii (30.11), procesul realizat fiind ireversibil.

b) Se calculează în mod analog variația entropiei ΔS_1 a sistemului apă+ sursa unu, apoi variația entropiei ΔS_2 a sistemului apă-sursa doi. Calculând suma $\Delta S_1 + \Delta S_2$, se determină variația entropiei sistemului total. Se obține $\Delta S = 50,4 \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

c) se observă că utilizarea a două surse micșorează variația entropiei. Rezultă: dacă numărul de surse devine infinit mare, atunci $\Delta S \rightarrow 0$.

Întrebări de verificare

1. Să se indice parametrii, de care depinde energia internă a unui sistem termodinamic. Să se argumenteze răspunsul în baza formulelor de calcul al energiilor interne ale gazelor ideal și real. Să se explice modalitățile de variație a energiei interne.
2. Să se explice sensul fizic al constantei universale a gazelor.
3. Ce proces simplu efectuează un gaz ideal, dacă se știe că lucrul gazului, între stările fixate inițială și finală, este maxim? Să se prezinte ilustrarea grafică a răspunsului.
4. Să se explice, în baza ecuației Poisson, cum variază temperatura gazului ideal la: *a)* dilatarea adiabatică; *b)* comprimarea adiabatică.
5. Să se definească procesul politrop. Să se deducă formulele de calcul pentru lucrul mecanic al gazului ideal în procesele izobar și adiabat în baza formulei de calcul a lucrului mecanic în procesul politrop.
6. Să se formuleze teorema Carnot. Să se demonstreze compatibilitatea ei cu formulările principiului al doilea al termodinamicii, date de către Clausius și Thomson.
7. Să se formuleze legea variației entropiei unui sistem termodinamic izolat. De ce procesul adiabat este numit și izoentrop?
8. Să se traseze ciclul Carnot în coordonatele $T - S$ și să se deducă formula de calcul a randamentului acestui ciclu.
9. Să se enunțe teorema lui Nernst și principiul al treilea al termodinamicii în formularea dată de Planck.
10. Să se argumenteze necesitatea utilizării în termodinamică și a altor funcții de stare, în afară de energia internă și entropie.

BIBLIOGRAFIE

1. Detlaf A.A., Iavorschi V.M., Curs de fizică, Chișinău, Lumina, 1991.
2. Traian I. Crețu., Fizica. Curs universitar, București, Editura tehnică, 1996.
3. Савельев И.В., Курс общей физики, т.1, Москва, Наука, 1979.
4. Luca E., Zet Gh., Jeflea A., Ciubotariu C., Pasnicu C., Fizica, v.1, București, Editura științifică, 1995.
5. Иродов И.Е., Задачи по общей физике, Москва, Наука, 1979.
6. Чертов А.Ф., Воробьев А.А., Задачи по физике, Москва, Высшая школа, 1981.

Cuprins

I. Cinematica punctului material și a solidului rigid

§ 1. Elemente de algebră vectorială.....5

1.1. Adunarea, scăderea și înmulțirea vectorilor.....5

1.2. Vectori unitate (versori). Vector de poziție.....7

1.3. Derivata unui vector.....9

§ 2. Sisteme de referință. Modele mecanice.....9

§ 3. Mărimi cinematice fundamentale.....10

3.1. Legile cinematicii ale mișcării.

Traietorie, deplasare.....10

3.2. Viteza medie, viteza momentană.....11

3.3. Accelerația medie, accelerația momentană.....13

3.4. Accelerațiile tangențială și normală.....14

§ 4. Cazuri particulare ale mișcării

punctului material.....17

4.1. Mișcarea rectilinie uniform variată.....17

4.2. Mișcare circulară. Mărimi cinematice unghiulare18

§ 5. Mișcări ale solidului rigid.....23

5.1. Mișcarea de translație.....23

5.2. Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.....23

Aplicații. Probleme rezolvate.....25

Întrebări de verificare.....33

II. Dinamica clasică a sistemelor de puncte materiale

§ 6. Principiile dinamicii clasice.....34

6.1. Principiul inerției.....35

6.2. Principiul fundamental al dinamicii. Principiul
independenței acțiunii forțelor.....35

6.3. Principiul acțiunii și reacțiunii38

***Lucrul și energia mecanică**

§ 7. Lucrul mecanic. Puterea. Forțele conservative și neconservative.....	38
7.1. Lucrul mecanic, puterea.....	38
7.2. Forțe conservative și neconservative.....	41
§ 8. Energia mecanică.....	45
8.1. Energia cinetică a punctului material.....	45
8.2. Energia potențială a punctului material.....	46
8.3. Exemple de calcul al energiei potențiale.....	49
Aplicații. Probleme rezolvate.....	51
Întrebări de verificare.....	60
**Dinamica sistemelor de puncte materiale	
§ 9. Centrul de masă al sistemului de puncte materiale și legea mișcării lui.....	61
§10. Teorema variației și legea conservării impulsului.....	63
§11. Teorema variației și legea conservării momentului impulsului.....	65
11.1. Momentul forței, momentul impulsului (momentul cinetic) unui punct material.....	66
11.2. Momentul impulsului unui sistem de puncte materiale. Teorema variației și conservării momentului impulsului sistemului de puncte materiale.....	69
§ 12. Teorema variației și legea conservării energiei mecanice.....	72
12.1. Energia cinetică a sistemului de puncte materiale.....	72
12.2. Teorema variației și legea conservării energiei mecanice.....	75
Aplicații. Probleme rezolvate.....	77
Întrebări de verificare.....	82

***** Dinamica solidului rigid în mișcare de rotație în jurul axei fixe**

§13. Momentul impulsului rigidului. Legea fundamentală a dinamicii rigidului în mișcare de rotație în jurul axei fixe.....	83
13.1. Momentul impulsului rigidului.....	83
13.2. Legea fundamentală a dinamicii rigidului în mișcare de rotație în jurul axei fixe.....	86
§ 14. Momentul de inerție al rigidului. Teorema Steiner.....	87
§ 15. Energia cinetică a rigidului în mișcare de rotație.....	90
§ 16. Lucrul forțelor externe asupra rigidului în mișcare de rotație.....	91
Aplicații. Probleme rezolvate.....	95
Întrebări de verificare.....	103
III. Bazele teoriei relativității restrânse	
§ 17. Principiul relativității în mecanica și în electromagnetismul clasic.....	104
17.1. Principiul relativității în mecanica clasică.....	104
17.2. Principiul relativității în electrodinamica clasică.....	106
§ 18. Postulatele teoriei relativității restrânse. Relații de transformare Lorentz.....	107
18.1. Principiile teoriei relativității restrânse.....	107
18.2. Relațiile de transformare Lorentz.....	108
18.3. Consecințe cinematice ale transformărilor Lorentz	111
§ 19. Noțiuni de dinamică a teoriei relativității restânse.....	118
19.1. Variația relativistă a masei	118
19.2. Impulsul relativist. Legea fundamentală a dinamicii relativiste.....	121

19.3. Energia cinetică. Legea interdependenței dintre masă și energie. Relația relativistă dintre energie și impuls.....	124
--	-----

Aplicații. Probleme rezolvate.....	128
---	------------

Întrebări de verificare.....	135
-------------------------------------	------------

IV. Bazele fizicii moleculare și ale termodinamicii

§ 20. Metode de studiu ale sistemelor macroscopice.....	136
--	------------

20.1. Metodele statistică și termodinamică.....	136
---	-----

20.2. Parametri de stare, procese termodinamice.....	138
--	-----

§ 21. Ecuații termice de stare.....	140
--	------------

21.1. Gaz ideal. Limitele de aplicabilitate a teoriei gazului ideal.....	140
--	-----

21.2. Ecuații de stare ale gazelor reale.....	142
---	-----

***Teoria cinetico-moleculară a gazelor**

§ 22. Ecuația de bază a teoriei cinetico-moleculare a gazului ideal.....	146
---	------------

§ 23. Elemente de statistică Maxwell- Boltzmann...149	
--	--

23.1 Echilibru statistic. Probabilitatea de distribuție (probabilitatea sau ponderea termodinamică).....	149
--	-----

23.2. Legea de distribuție Maxwell – Boltzmann.....	155
---	-----

23.3. Distribuția moleculelor gazului ideal după energii și după viteze.....	159
--	-----

23.4. Distribuția Boltzmann a moleculelor gazului ideal după energii într-un câmp extern de forțe conservative.	
---	--

Formula barometrică.....	165
--------------------------	-----

§ 24. Legea echipartiției energiei cinetice medii după grade de libertate.....	168
---	------------

§ 25. Parcursul liber mediu al moleculelor.....	172
--	------------

§ 26. Fenomene de transport.....	175
---	------------

26.1. Ecuații generale ale fenomenelor de transport în gaze ideale.....	176
---	-----

26.2. Conductibilitatea termică.....	178
--------------------------------------	-----

26.3. Frecarea internă (vâscozitate).....	179
26.4. Difuzia.....	182
26.5. Consecințe din teoria fenomenelor de transport în gaze.....	185
Aplicații. Probleme rezolvate.....	185
Întrebări de verificare.....	197
**Bazele termodinamicii	
§ 27. Principiul întâi al termodinamicii.....	198
27.1. Energia internă a sistemului termodinamic.....	198
27.2. Energiile interne ale gazelor ideale și reale.....	200
27.3. Lucrul mecanic al sistemului termodinamic.....	201
27.4. Schimb de căldură. Coeficienți calorici.....	203
27.5. Principiul întâi al termodinamicii.....	204
§ 28. Transformări simple ale gazelor.	
Proces adiabetic. Procese politrope.....	205
28.1. Procese izocore ($V = const$).....	206
28.2. Procese izobare ($p = const$).....	207
28.3. Deficiențele teoriei clasice a coeficienților calorici ai gazelor ideale.....	209
28.4. Procese adiabatice.....	210
28.5. Procese politrope.....	212
§ 29. Principiul al doilea al termodinamicii.....	216
29.1. Procese reversibile și ireversibile	216
29.2. Procese ciclice. Ciclul Carnot.....	218
29.3. Principiul al doilea al termodinamicii.....	220
§ 30. Entropia. Interpretarea statistică a entropiei...222	
30.1. Călduri reduse. Inegalitatea Clausius.....	222
30.2. Entropia ca funcție de stare. Legea variației entropiei sistemului izolat.....	223
30.3. Analiza proceselor termodinamice cu ajutorul entropiei.....	227

30.4. Interpretarea statistică a entropiei.....	230
30.5. Dependența dintre entropie și cantitatea de informație.....	233
§ 31. Principiul al treilea al termodinamicii.....	237
§ 32. Potențiale termodinamice.....	240
Aplicații. Probleme rezolvate.....	243
Întrebări de verificare.....	255
Bibliografie.....	256